

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Marguerite CONSTANS

**1^{re} THÈSE. — Causes d'erreurs en métrologie
interférentielle.**

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 5 Juin 1961 devant la Commission d'examen.

MM.	ARNULF	<i>Président.</i>
	MALAVARD	{ <i>Examineurs.</i>
	MARÉCHAL	

Extrait de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1962



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : CONSTANS

Prénom : Marguerite

Date de la soutenance : 5 Juin 1961

Numéro d'ordre : 704

1

CONSTANS (Marguerite). — Causes d'erreurs en métrologie interférentielle. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1962, in-8°, 48 p., 32 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1962, N° 704.

2

CONSTANS (Marguerite). — Causes d'erreurs en métrologie interférentielle. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1962, in-8°, 48 p., 32 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1962, N° 704.

3

CONSTANS (Marguerite). — Causes d'erreurs en métrologie interférentielle. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1962, in-8°, 48 p., 32 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1962, N° 704.

4

CONSTANS (Marguerite). — Causes d'erreurs en métrologie interférentielle. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1962, in-8°, 48 p., 32 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1962 N° 704.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Marguerite CONSTANS

**1^{re} THÈSE. — Causes d'erreurs en métrologie
interférentielle.**

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 5 Juin 1961 devant la Commission d'examen.

MM.	ARNULF	{	Président.
	MALAVARD		Examineurs.
	MARÉCHAL		



Extrait de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1962

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen.....J. PÉRÈS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	JUNG	T	Pétrographie.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	JACQUINOT	T	Spectroscopie (Orsay).
PLANTEFOL	T	Botanique.	VASSY	T	Physique de l'Atmosphère.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	DESTOUCHES	T	Théories Physiques.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	PRUVOST	T	Géologie.
BOULIGAND.....	T	Analyse appliquée à la Géométrie.	AMIEL	T	Chimie des Solides.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	HOCART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
WYART	T	Minéralogie et Cristallogr.	J. P. MATHIEU	T	Recherches Physiques.
TEISSIER	T	Zoologie.	COUTEAUX	T	Biol. Animale (P. C. B.).
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay).	MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.
MONNIER	T	Physiologie des Fonctions.	FELDMANN	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
PIVETEAU	T	Paléontologie.	GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).	JOST	T	Physiologie comparée.
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).	FORTET	T	Calcul des Probabilités.
LAFFITTE	T	Chimie Générale.	SCHWARTZ.....	T	Calcul diff. et Intégral.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
COULOMB	T	Physique du Globe.	MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéro-naut.).
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	NORMANT	T	Synthèse organique générale.
DRACH	T	Zoologie.	BÉNARD	T	Chimie (E. N. S. C. P.).
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).	BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.	DUGUÉ	T	Statistiques Mathématiques.
RIVIÈRE	T	Géologie (Orsay).	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
GAUTHERET	T	Biologie (P. C. B.).	ULRICH	T	Physiologie Végétale (E. N. S.).
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.	KIRRMANN	T	Théories Chimiques.
ARNULF	T	Optique appliquée.	CHADEFAUD	T	Botanique.
MORAND	T	Physique Enseignement.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).	SALEM	T	Mathématiques générales.
FORTIER	T	Mécan. expérimentale des Fluides.	LELONG	T	Mathématiques générales.
DANJON	T	Astronomie.	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
PETIT	T	Biologie maritime.	EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	FRANCON	T	Physique (S. P. C. N.).
GALLIEN	T	Embryologie.	GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
EICHHORN.....	T	Biologie Végétale (P.C.B.).	GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (S. P. C. N.).	PISOT.....	T	Calcul des Probabilités.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie Physique.	ROCH	T	Géologie.
THELLIER	T	Physique du Globe.	SCHATZMAN.....	T	Astrophysique.
L'HÉRITIER	T	Biologie Générale (Orsay).	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
PONCIN	T	Mécanique Générale.	LENNUIER.....	T	Physique (P. C. B.).
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.	RIZET	T	Génétique (Orsay).
QUELET	T	Chimie Organique.	ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	M ^{me} TONNELAT	T	Relativité.
CHAMPETIER	T	Chimie Macromoléculaire.			

(suite en dernière page)

CAUSES D'ERREURS EN MÉTROLOGIE INTERFÉRENTIELLE

par M^{lle} Marguerite CONSTANS

Ingenieur de Recherches à l'Office National d'Etudes
et de Recherches Aéronautiques

SOMMAIRE. — *L'emploi généralisé des méthodes interférentielles pour les études aérodynamiques fait apparaître la nécessité d'une étude systématique des causes d'erreurs inhérentes à ces méthodes.*

Les erreurs ont été classées en quatre catégories :

erreurs dues à la réfraction, c'est-à-dire à la courbure des rayons lumineux introduite par le gradient d'indice ;

erreurs altérant les gradients eux-mêmes (courants d'air, vibrations, variation de la température) ;

erreurs dues à l'appareil et aux conditions de réglage ;

erreurs dues au dépouillement.

Les erreurs dues à la réfraction sont étudiées théoriquement pour un milieu bidimensionnel où l'indice varie de façon continue. Le calcul a été mené dans le second ordre. On distingue deux sortes d'erreurs :

celles qui affectent tous les objets réels placés dans la veine ou en amont de celle-ci ;

celles qui affectent seulement les franges des interférogrammes.

On montre que ces dernières peuvent être annulées, si on prend soin de faire la mise au point dans un plan situé au deuxième tiers aval de la veine.

On donne les formules permettant le calcul et la correction des erreurs. On compare les valeurs des erreurs à la précision donnée par les appareils de mesure. On conclut que ces erreurs sont le plus souvent négligeables tant en interférométrie qu'en strioscopie interférentielle.

Pour la vérification expérimentale, les gradients sont obtenus par diffusion d'un cristal d'hyposulfite dans l'eau distillée ou par diffusion d'une solution concentrée d'hyposulfite dans l'eau distillée. Les résultats obtenus sont relatifs à un angle d'incidence nul.

1° On montre que les erreurs qui affectent les interférogrammes sont négligeables devant la précision de l'appareil,

quel que soit le plan de mise au point à l'intérieur de la veine,

quelle que soit l'épaisseur de la veine (100 ou 10 mm) pour les gradients réalisés qui sont inférieurs à $5 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$.

2° On contrôle les formules donnant la déformation d'un objet réel,

pour plusieurs positions de cet objet,

pour plusieurs gradients.

La vérification est le plus souvent obtenue à 6 ou 8 % près, toujours à mieux que 15 % près.

Les erreurs qui ne sont pas dues à la réfraction sont étudiées expérimentalement ; l'appareillage décrit permet de s'en affranchir complètement. C'est un interféromètre de Mach-Zehnder horizontal réalisé en silice fondue. Il ne subsiste dans tout le champ (de $60 \times 60 \text{ mm}$) qu'un défaut résiduel inférieur à $\lambda/13$. Une enceinte isotherme maintient la température constante à mieux que $0,03^\circ \text{C}$ pendant plus de 12 h consécutives. Les vibrations sont éliminées au moyen d'une suspension à ressorts.

SUMMARY. — *The universal use of interference methods in aerodynamics makes evident the need for a systematic study of the errors associated with such methods. These errors have been classified into four different types :*

- 1) errors due to the refraction, i. e. to the curvature of the rays owing to the refractive index gradient
- 2) errors altering the gradients themselves (draughts, vibrations, change in temperature...);
- 3) errors due to the instrument itself and to the adjustment conditions;
- 4) errors due to the interpretation of results.

The first errors due to refraction are theoretically studied for a two-dimensional medium where the refractive index is varied continuously. The calculation was carried out in the second order approximation. Two types of errors may occur :

- a) errors affecting all real objects placed into the jet or up-stream ;
- b) errors affecting only the interferogram fringes.

It is shown that the last ones can be cancelled out, provided that the focusing plane is situated at the second third down-stream of the jet.

Formulae for an evaluation and correction of errors are given. The values obtained are compared with the accuracy yielded by the measuring instrument. It is concluded that those errors are very often negligible both in interferometry and in strioscopy.

For the experimental checking, the gradients are obtained by diffusion of a hyposulfite crystal into distilled water or by diffusion of a concentrated solution of hyposulfite salt into distilled water. The results obtained concern a zero incidence angle :

1) The errors affecting the interferograms appear to be very small as compared with those resulting from the instrument imperfections, wherever the focusing plane may be inside the jet and whatever the thickness of the jet may be (100 or 10 mm), provided the gradients remain smaller than $5 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$.

2) The formulae giving the deformation of a real object are checked for several positions of the object and for several gradient values.

Very often the checking corresponds to an accuracy of about 6 or 8 %. It is always better than 15 %.

Errors not resulting from refraction are studied experimentally : the equipment described makes it possible to get rid of them. It consists of a horizontal Mach-Zehnder interferometer realized in silica. Over the whole field ($60 \times 60 \text{ mm}$) the residual defect is smaller than $\lambda/13$. By an isothermal jacket the temperature is kept constant to better than $0,03^\circ \text{C}$ in the course of 12 hours. Vibrations are eliminated by means of an elastic suspension.

1. Introduction. — Les méthodes interférentielles pour la mesure des variations d'indice sont bien connues et d'un emploi courant [1 à 5].

En recherche aéronautique particulièrement, des appareils d'interférométrie ou de strioscopie interférentielle équipent maintenant de nombreuses souffleries. Ces appareils présentent l'avantage d'une visualisation globale d'un champ étendu autour de la maquette à étudier. En outre, ils évitent d'introduire, à l'intérieur de la soufflerie, des jauges ou autres appareils de mesure qui, par leur présence même, perturbent plus ou moins le phénomène.

La loi de Gladstone permet de déduire aisément les valeurs de la densité à partir des mesures de l'indice de réfraction.

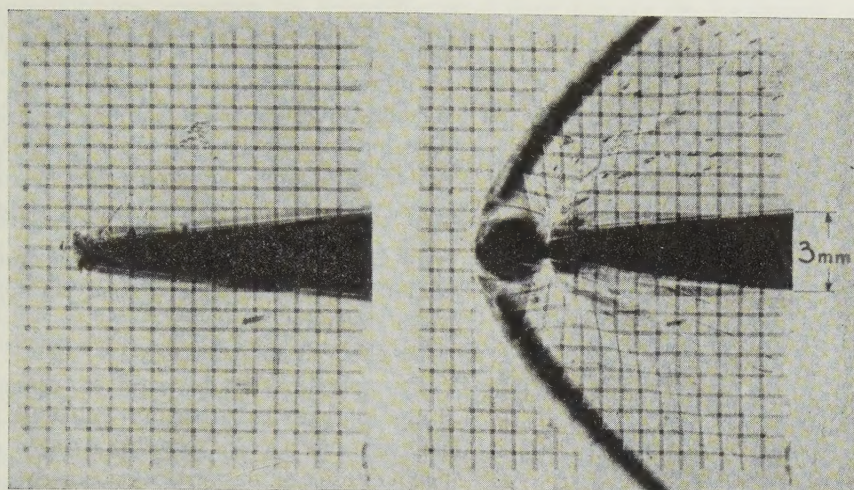
L'exploitation quantitative des résultats donnés par les méthodes interférentielles fait apparaître la nécessité d'une étude systématique des causes d'erreurs inhérentes à ces méthodes.

Le but de ce travail est l'étude de certaines de ces erreurs.

Nous distinguerons quatre sortes d'erreurs.

1. Erreurs dues au principe de la méthode ou erreurs dues à la réfraction. — Un interféromètre est un appareil qui sépare un faisceau lumineux en deux parties distinctes : l'une passe dans un milieu homogène de référence tandis que la seconde traverse la perturbation à étudier. L'appareil recompose ensuite le faisceau. Les deux parties interfèrent et l'état d'interférence obtenu est caractéristique de la différence d'indice de réfraction entre les milieux traversés par chaque partie.

Un appareil de strioscopie interférentielle décompose de même le faisceau mais les deux parties traversent le milieu perturbé avec seulement un léger décalage.



(a)

(b)

FIG. 1. — Déformation d'une grille et d'une maquette par les gradients d'indice de réfraction ; épaisseur de la veine, $a = 50$ mm : a) cliché à l'arrêt ; b) cliché pendant soufflage sous 4 atm.

La valeur de ce décalage, appelé dédoublement, est choisie d'autant plus grande que l'on cherche un appareil plus sensible. L'état d'interférence obtenu à la recombinaison des deux parties est alors caractéristique de la variation différentielle de l'indice de la perturbation à étudier, c'est-à-dire du gradient d'indice.

Lorsque le milieu à étudier n'est pas homogène, le rayon qui traverse cette zone perturbée est déformé par le gradient d'indice. Il est courbé du côté des forts indices suivant les lois bien connues de la réfraction. Cette courbure des rayons lumineux provoque trois sortes d'erreurs :

a) déformation des objets réels et en particulier, en soufflerie, déformation du profil. Des clichés pris à travers une soufflerie en état de marche montrent l'importance d'une telle déformation sur une grille appliquée contre le hublot de la soufflerie et sur la maquette étudiée (fig. 1) ;

b) distorsion du tableau de franges ;

c) modification des valeurs d'indice mesurées. Ces méthodes, en effet, ne permettent qu'une mesure globale de l'indice le long d'un rayon lumineux.

On montrera comment ces erreurs varient avec les valeurs du gradient, avec la mise au point, avec l'épaisseur traversée et avec l'angle d'incidence du rayon lumineux.

Le calcul montre que, si le milieu perturbé ne présente pas de variation brutale de l'indice, ces erreurs sont le plus souvent négligeables vu les performances des appareils utilisés.

2. Erreurs altérant les gradients eux-mêmes. — a) L'attention des utilisateurs a toujours été retenue par l'influence des vibrations et des courants d'air sur les réglages d'un interféromètre et sur l'aspect des interférogrammes.

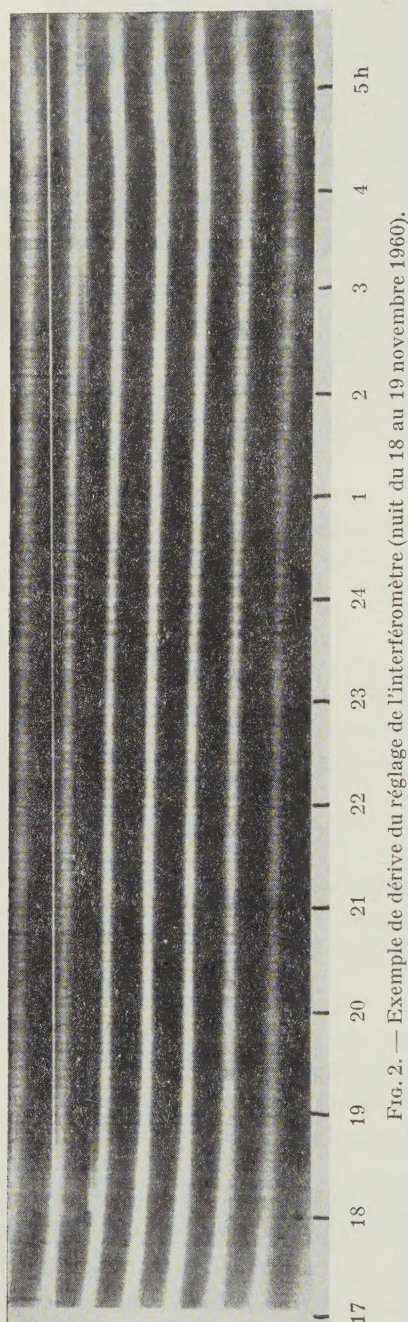


FIG. 2. — Exemple de dérive du réglage de l'interféromètre (nuit du 18 au 19 novembre 1960).

De nombreux dispositifs ont été essayés pour réduire vibrations et courants d'air au minimum (suspension à ressorts ou sur pneumatique, capotage souple des appareils, locaux spécialement aménagés). Pour éviter les flexions, on recherche des supports toujours plus lourds et plus rigides.

b) Des erreurs beaucoup plus gênantes du fait qu'on ne sait pas y remédier sont :
les effets de parois,
les effets de température.

On appelle effet de paroi la présence d'une couche perturbée au voisinage de tous les corps solides existant dans le milieu à étudier et, en particulier, au contact des hublots qui limitent ce milieu.

On l'explique d'abord par la viscosité des milieux à étudier (liquides ou gaz) qui sont freinés dans leurs mouvements ou dans leurs échanges au voisinage des parois et, d'autre part, on l'explique par la différence de conductivité thermique entre les parois et le milieu. Cette différence de conductivité thermique maintient des écarts de température qui ajoutent des gradients locaux aux phénomènes à étudier.

Le refroidissement des glaces de veine au moment du soufflage est souvent inévitable. De même, toute manipulation des boutons de réglage d'un interféromètre transmet à celui-ci une déformation parasite qui s'amortit très lentement.

Une isolation thermique de tout l'appareil peut améliorer la situation ; mais l'équilibre de température entre tous les points de l'interféromètre doit être réalisé à mieux que $0,1^{\circ}\text{C}$ pour que les courants de convection ne modifient pas de façon apparente (supérieure à $\lambda/10$) les réglages de l'interféromètre.

Dans le cas d'une cuve à eau placée sur le trajet de l'interféromètre, celle-ci doit être calorifugée 10 fois mieux encore.

Les variations lentes de la température au cours des expériences (conditions

atmosphériques, présence des observateurs, chaleur dégagée par les sources, etc.) provoquent de plus des flexions, des contractions et dilatations de la mécanique et des supports. On observe pour cette raison une dérive à peu près continue du réglage. Cette dérive ne semble pas soumise à une loi constante de périodicité et d'amplitude.

La figure 2 est un enregistrement de cette dérive au cours d'une nuit.

3. Erreurs dues à l'appareil et aux conditions de réglage. — a) La plupart de ces erreurs peuvent être corrigées au moyen d'une correctrice d'état initial, sorte d'étalonnage de l'appareil en l'absence de tout phénomène.

C'est le cas de la distorsion et des autres aberrations des systèmes optiques. C'est aussi le cas des défauts résiduels de l'interféromètre.

b) Le plan dans lequel on localise les franges pourrait aussi avoir une influence sur la forme des interférogrammes. Les expériences faites à ce sujet semblent prouver que la tolérance sur la localisation est très supérieure à la tolérance sur la netteté des franges.

c) Nous verrons à propos du dépouillement des interférogrammes quelle est l'importance du choix de l'état initial.

Le réglage en teinte plate ou en franges plus ou moins serrées, l'orientation donnée à ces franges d'état initial peuvent modifier considérablement la précision du résultat.

Le choix du réglage initial doit être adapté à chaque cas particulier.

4. Erreurs de dépouillement. — Les procédés de dépouillement d'un interférogramme ou d'un striogramme (en teinte plate ou en franges, en noir ou en couleurs), la précision qu'on peut attendre d'un dépouillement ont déjà été étudiés par les utilisateurs.

2. Erreurs dues à la réfraction (étude théorique). — *1. Principe. Notations.* — La manière de poser le problème et les notations utilisées au cours de ce calcul sont directement inspirées par les travaux sur la réfraction déjà publiés par Svensson [6, 7].

Nous considérons, pour simplifier cette étude, que le milieu est bidimensionnel ; soit Oy l'axe de perturbation. L'indice de réfraction n du milieu perturbé est une fonction de y seul.

Nous raisonnons d'abord dans le cas de l'interférométrie.

Nous nous plaçons, pour le calcul, dans l'espace relatif au milieu à étudier (fig. 3). Cet espace est limité par la face aval du hublot d'entrée (plan xOy) et par la face amont du hublot de sortie (plan $z = a$) ; il a une épaisseur a . Cet espace est, en réalité, composé de deux espaces superposables : l'un, de référence, est sur le trajet non perturbé de l'interféromètre. Il est caractérisé par un indice homogène m ; le second est le milieu à étudier, d'indice $n(y)$.

Nous admettons, pour simplifier les notations, que cet espace, au lieu d'être limité par le verre ou le quartz des hublots, baigne dans le milieu d'indice m . On voit facilement que l'introduction de deux lames de verre à faces planes et paral-

cette erreur est fonction de z , sa valeur moyenne le long de la trajectoire I_0I_a

$$\text{s'écrit } \overline{\Delta y} = \frac{1}{a} \int_0^a \Delta y \, dz ;$$

une erreur sur l'indice

$$(2) \quad \Delta n = n(y) - \bar{n} ,$$

qui est aussi fonction de z et a pour valeur moyenne $\overline{\Delta n} = \frac{1}{a} \int_0^a \Delta n \, dz$.

Soit S la différence de marche observée en B ; on la mesure directement sur l'interférogramme. Elle s'écrit

$$S = m \overline{AI_0} + \int_{I_0}^{I_a} n(y) \, dl + m \overline{I_aB} - m \overline{AB} ,$$

où dl est l'élément de longueur sur la trajectoire du rayon lumineux I_0I_a .

On calcule $\bar{n}$ à partir de S par la relation

$$(3) \quad \begin{aligned} S &= \overline{J_0J_a} (\bar{n} - m) , \quad \text{d'où} \quad \bar{n} = m + (S/\overline{J_0J_a}) , \\ \bar{n} &= m + m \frac{\overline{AI_0}}{\overline{J_0J_a}} + \frac{1}{\overline{J_0J_a}} \int_{I_0}^{I_a} n(y) \, dl + m \frac{\overline{I_aB}}{\overline{J_0J_a}} - m \frac{\overline{AB}}{\overline{J_0J_a}} . \end{aligned}$$

B) DÉFORMATION DU PROFIL. — Supposons qu'il existe un objet réel dans un plan $z = pa$ quelconque intérieur à la veine ou en amont de celle-ci ($p < 1$). Prenons sur cet objet un point P qui a, dans le plan de mise au point, une image en B, nette si $p = r$, floue dans le cas contraire. Nous considérons comme négligeables les aberrations dues aux optiques de l'interféromètre.

Le rayon lumineux I_0I_a qui éclaire P est courbé. A cause de cette courbure, l'objet apparaît dans le plan d'observation comme s'il était situé, non en P, mais en un point Q sur le prolongement du rayon émergent I_aB .

La déformation du profil est

$$(4) \quad \Delta p = \overline{PQ} = y_Q - y_P .$$

C) LOIS DE LA RÉFRACTION ; ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE. — Soient $\bar{\delta}$ l'angle du rayon fictif AJ_0JJ_aB avec l'axe Oz , δ_0 l'angle d'incidence du rayon perturbé sur le plan xOy , δ_a son angle d'émergence, α l'angle de la trajectoire avec l'axe Oz , α_0 et α_a ses valeurs particulières en I_0 et I_a respectivement.

Soient n_0 et n_a les valeurs particulières de l'indice $n(y)$ en I_0 et I_a respectivement.

La loi de la réfraction s'écrit, le long du rayon AI_0II_aB ,

$$m \sin \delta_0 = n_0 \sin \alpha_0 ,$$

$$n \cos \alpha = n_0 \cos \alpha_0 \text{ et, en particulier, } n_a \cos \alpha_a = n_0 \cos \alpha_0$$

(loi de la réfraction sur des surfaces équi-indice parallèles au plan xOz),

$$m \sin \delta_a = n_a \sin \alpha_a .$$

La trajectoire du rayon perturbé I_0II_a satisfait à l'équation différentielle

$$y' = dy/dz = \operatorname{tg} \alpha .$$

Au moyen de ces relations et des données géométriques visibles sur la figure 3,

nous allons exprimer les trois erreurs $\overline{\Delta n}$, $\overline{\Delta y}$ et Δp en fonction des paramètres $\bar{\delta}$, $\bar{n}$ directement tirés de l'expérience et des dérivées successives de $\bar{n}$ par rapport à y .

On pose, pour simplifier l'écriture,

$$y_{I_0} = y_0, y_{I_a} = y_a, y_I = y; \quad y - y_0 = \varepsilon, y_a - y_0 = \varepsilon_a.$$

2. *Calculs.* — On néglige ici :

les dérivées d'ordre égal ou supérieur à 3 de $n(y)$ et $\bar{n}(y)$;

les termes en $1/t$;

les termes d'ordre égal ou supérieur à 3 en $\bar{n} - m$. La méthode de calcul utilisée est cependant absolument générale et nous l'avons appliquée avec succès aux calculs d'ordre supérieur.

A) CALCUL DE LA TRAJECTOIRE DU RAYON RÉFRACTÉ. — La loi de la réfraction permet d'écrire l'équation différentielle de la trajectoire sous la forme

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + y'^2} = \left(\frac{n_0 \cos \alpha_0}{n} \right)^2,$$

d'où

$$y'^2 = \left(\frac{n}{n_0 \cos \alpha_0} \right)^2 - 1.$$

Avec les approximations convenues ci-dessus, nous appliquons la formule de Taylor à la loi $n(y)$:

$$n = n_0 + \varepsilon n'_0 + \varepsilon^2 \frac{n''_0}{2}.$$

Cette formule suppose que l'indice de réfraction est une fonction continue et dérivable de y . Elle n'est donc pas applicable au cas d'une discontinuité comme celle de l'onde de choc. Elle permet d'écrire

$$y'^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \frac{2 n'_0 \varepsilon}{n_0 \cos^2 \alpha_0} + \frac{(n''_0 n_0 + n_0'^2) \varepsilon^2}{n_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Soit $P(\varepsilon)$ le polynôme en ε qui figure au second membre de cette dernière relation.

On a

$$y' = dy/dz = [P(\varepsilon)]^{1/2},$$

d'où

$$dz = [P(\varepsilon)]^{-1/2} dy.$$

Pour résoudre cette équation différentielle, nous utilisons la formule de Taylor.

La solution est de la forme

$$z = z_0 + \varepsilon z'_0 + \varepsilon^2 \frac{z''_0}{2} + \varepsilon^3 \frac{z'''_0}{3!} + \dots$$

Lorsque $z = 0$, on a $y = y_0$ par convention, donc $\varepsilon = 0$ et la constante d'intégration z_0 est nulle.

$$\begin{cases} z_0 = 0, & z'_0 = P(0)^{-1/2}, \\ z''_0 = -\frac{1}{2} P(0)^{-3/2} P'(0), & z'''_0 = +\frac{3}{4} P(0)^{-5/2} P'(0)^2 - \frac{1}{2} P(0)^{-3/2} P''(0); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 = 0, \\ z_0'' = -\frac{n_0'}{n_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \sin^2 \alpha_0}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z_0' = 1/\operatorname{tg} \alpha_0, \\ z_0''' = \frac{3 n_0'^2}{n_0^2 \operatorname{tg} \alpha_0 \sin^4 \alpha_0} - \frac{n_0'' n_0 + n_0'^2}{n_0^2 \operatorname{tg} \alpha_0 \sin^2 \alpha_0}. \end{array}$$

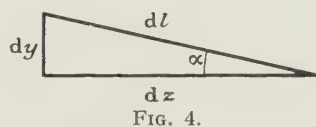
Les dérivées d'ordre supérieur sont toutes négligeables ; l'équation de la trajectoire est donc

$$(5) \quad z = \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha_0} \left[1 - \varepsilon \frac{n_0'}{2 n_0 \sin^2 \alpha_0} + \varepsilon^2 \frac{3 n_0'^2 - \sin^2 \alpha_0 (n_0'' n_0 + n_0'^2)}{6 n_0^2 \sin^4 \alpha_0} \right].$$

B) CALCUL DU CHEMIN OPTIQUE $\int_{I_0}^I n \, dl$ (fig. 4). —

$$dl = dy/\sin \alpha = d\varepsilon/\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\int_{I_0}^I n \, dl = \int_0^\varepsilon \frac{n \, d\varepsilon}{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha},$$



$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \left[\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \frac{2 n_0' \varepsilon}{n_0 \cos^2 \alpha_0} + \frac{n_0'' n_0 + n_0'^2}{n_0^2 \cos^2 \alpha_0} \varepsilon^2 \right]^{1/2},$$

$$\frac{n}{\cos \alpha} = \frac{n^2}{n_0 \cos \alpha_0} = \frac{1}{n_0 \cos \alpha_0} \left[n_0 + n_0' \varepsilon + n_0'' \frac{\varepsilon^2}{2} \right]^2,$$

$$\int_{I_0}^I n \, dl = \int_0^\varepsilon \frac{n_0 \, d\varepsilon}{\sin \alpha_0} \left[1 - \varepsilon \frac{n_0' (1 - 2 \sin^2 \alpha_0)}{n_0 \sin^2 \alpha_0} + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \frac{n_0'^2 \cos^2 \alpha_0 (3 - 2 \sin^2 \alpha_0) + n_0'' n_0 \sin^2 \alpha_0 (1 - 2 \sin^2 \alpha_0)}{2 n_0^2 \sin^4 \alpha_0} \right],$$

$$\int_{I_0}^I n \, dl = \frac{n_0 \varepsilon}{\sin \alpha_0} \left[1 - n_0' \varepsilon \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha_0}{2 n_0 \sin^2 \alpha_0} + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \frac{n_0'^2 \cos^2 \alpha_0 (3 - 2 \sin^2 \alpha_0) + n_0'' n_0 \sin^2 \alpha_0 (1 - 2 \sin^2 \alpha_0)}{6 n_0^2 \sin^4 \alpha_0} \right].$$

C) EXPRESSION DES ERREURS. — On voit sur la figure 3 que

$$\overline{AI_0} = t a/\cos \delta_0, \quad \overline{I_a B} = (r - 1) a/\cos \delta_a,$$

$$\overline{AB} = (t + r) a/\cos \bar{\delta}, \quad \overline{J_0 J_a} = a/\cos \bar{\delta},$$

d'où l'on tire, d'après (3),

$$(6) \quad \bar{n} = m t \left[\frac{\cos \bar{\delta}}{\cos \delta_0} - 1 \right] + m (r - 1) \left[\frac{\cos \bar{\delta}}{\cos \delta_a} - 1 \right] + \\ + \frac{n_0 \cos \bar{\delta}}{a \sin \alpha_0} \varepsilon_a \left[1 - \varepsilon_a \frac{n_0' (1 - 2 \sin^2 \alpha_0)}{2 n_0 \sin^2 \alpha_0} + \right. \\ \left. + \varepsilon_a^2 \frac{n_0'^2 \cos^2 \alpha_0 (3 - 2 \sin^2 \alpha_0) + n_0'' n_0 \sin^2 \alpha_0 (1 - 2 \sin^2 \alpha_0)}{6 n_0^2 \sin^4 \alpha_0} \right].$$

On écrit (2) sous la forme

$$(7) \quad \Delta n = n_0 + \varepsilon n'_0 + \varepsilon^2 \frac{n''_0}{2} - \bar{n}.$$

De (1) on tire

$$\begin{aligned} \Delta y &= y - y_J = (y - y_0) + (y_0 - y_A) + (y_A - y_B) + (y_B - y_{J_0}) + (y_{J_0} - y_J) \\ &= \varepsilon + t a \operatorname{tg} \delta_0 - (t + r) a \operatorname{tg} \bar{\delta} + r a \operatorname{tg} \bar{\delta} - z \operatorname{tg} \bar{\delta} \end{aligned}$$

et finalement

$$(8) \quad \Delta y = \varepsilon + t a (\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{tg} \bar{\delta}) - z \operatorname{tg} \bar{\delta}.$$

De (4) on tire

$$\Delta p = y_Q - y_P = (y_Q - y_A) + (y_A - y_0) - (y_P - y_0),$$

donc

$$(9) \quad \Delta p = (p - 1) a \operatorname{tg} \delta_a + \varepsilon_a - \varepsilon_{pa}, \quad \text{si } 0 < p < 1$$

et

$$(10) \quad \Delta p = (p - 1) a \operatorname{tg} \delta_a + \varepsilon_a - p a \operatorname{tg} \delta_0, \quad \text{si } p < 0.$$

D) ELIMINATION DES ANGLES α , δ_0 ET δ_a QUI NE PEUVENT ÊTRE NI MESURÉS SUR LE MONTAGE, NI DÉDUITS DE L'INTERFÉROGRAMME. — a) *Elimination de α_0 , α , α_a .* —

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \frac{m \sin \delta_0}{n_0}, \quad \cos^2 \alpha_0 = \frac{n_0^2 - m^2 \sin^2 \delta_0}{n_0^2}, \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_0} = \frac{n_0^2 - m^2 \sin^2 \delta_0}{m^2 \sin^2 \delta_0}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{m \sin \delta_0}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \delta_0)^{1/2}} \left[1 + \varepsilon \frac{n'_0 n_0}{m^2 \sin^2 \delta_0} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \frac{m^2 \sin^2 \delta_0 (n''_0 n_0 + n'^2_0) - n'^2_0 n_0^2}{2 m^4 \sin^4 \delta_0} \right]; \\ \operatorname{tg} \alpha_a &= \frac{m \sin \delta_0}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \delta_0)^{1/2}} \left[1 + \varepsilon_a \frac{n'_0 n_0}{m^2 \sin^2 \delta_0} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_a^2 \frac{m^2 \sin^2 \delta_0 (n''_0 n_0 + n'^2_0) - n'^2_0 n_0^2}{2 m^4 \sin^4 \delta_0} \right]. \end{aligned}$$

b) *Elimination de δ_a .* —

$$\begin{aligned} \sin \delta_a &= \frac{n_a \sin \alpha_a}{m} = \frac{n_a \cos \alpha_a \operatorname{tg} \alpha_a}{m} = \frac{n_0 \cos \alpha_0}{m} \operatorname{tg} \alpha_a \\ &= \frac{n_0 \sin \alpha_0}{m} \left[1 + \varepsilon_a \frac{n'_0 n_0}{m^2 \sin^2 \delta_0} + \varepsilon_a^2 \frac{m^2 \sin^2 \delta_0 (n''_0 n_0 + n'^2_0) - n'^2_0 n_0^2}{2 m^4 \sin^4 \delta_0} \right] \\ &= \sin \delta_0 \left[1 + \varepsilon_a \frac{n'_0 n_0}{m^2 \sin^2 \delta_0} + \varepsilon_a^2 \frac{m^2 \sin^2 \delta_0 (n''_0 n_0 + n'^2_0) - n'^2_0 n_0^2}{2 m^4 \sin^4 \delta_0} \right], \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \delta_a = \sin \delta_a (1 - \sin^2 \delta_a)^{-1/2}$$

$$= \operatorname{tg} \delta_0 \left[1 + \varepsilon_a \frac{n'_0 n_0}{m^2 \sin^2 \delta_0 \cos^2 \delta_0} + \varepsilon_a^2 \frac{(n''_0 n_0 + n_0'^2) - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \delta_0}{m^2 \sin^2 \delta_0}}{2 m^2 \sin^2 \delta_0 \cos^2 \delta_0} \right].$$

c) *Elimination de δ_0 .* —

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\delta} &= -\frac{y_A - y_B}{(t + r) a} = -\frac{(y_A - y_0) + (y_0 - y_a) + (y_a - y_B)}{(t + r) a} \\ &= \frac{t a \operatorname{tg} \delta_0 + \varepsilon_a + (r - 1) a \operatorname{tg} \delta_a}{(t + r) a} \\ &= \frac{t + r - 1}{t + r} \operatorname{tg} \delta_0 + \frac{\varepsilon_a}{(t + r) a} + \\ &+ \frac{(r - 1)}{t + r} \frac{\operatorname{tg} \delta_0 \varepsilon_a}{m^2 \sin^2 \delta_0 \cos^2 \delta_0} \left[n'_0 n_0 + \frac{\varepsilon_a}{2} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \delta_0}{m^2 \sin^2 \delta_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

En admettant comme nous l'avons précisé au début que t tend vers l'infini et que les termes en $1/t$ sont négligeables, on trouve $\bar{\delta} = \delta_0$.

Cherchons, pour le calcul de Δy , la limite de $t a (\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{tg} \bar{\delta})$ lorsque t tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} t a (\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{tg} \bar{\delta}) &= a \operatorname{tg} \bar{\delta} \left[1 - \frac{\varepsilon_a}{a \operatorname{tg} \bar{\delta}} - \frac{(r - 1) n'_0 n_0 \varepsilon_a}{m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos^2 \bar{\delta}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r - 1) \varepsilon_a^2}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos^2 \bar{\delta}} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Cherchons la limite de la quantité $m t [(\cos \bar{\delta} / \cos \delta_0) - 1]$ que nous appellerons X . X figure dans l'expression (6) de $\bar{n}$; on peut l'évaluer algébriquement suivant la méthode utilisée jusqu'ici, on peut aussi, et on trouve le même résultat, remarquer que la quantité X caractérise le chemin optique avant l'entrée de la cuve (fig. 5) :

$$X = m \overline{J_0 H} \frac{\cos \bar{\delta}}{a} = m \overline{I_0 J_0} \frac{\sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{a},$$

$$\begin{aligned} \overline{I_0 J_0} &= (y_0 - y_a) + (y_a - y_B) + (y_B - y_{J_0}) \\ &= -\varepsilon_a - (r - 1) a \operatorname{tg} \delta_a + r a \operatorname{tg} \bar{\delta}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X &= m \sin^2 \bar{\delta} - m \sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta} \frac{\varepsilon_a}{a} - \\ &- \frac{(r - 1) \varepsilon_a}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left[n'_0 n_0 + \frac{\varepsilon_a}{2} \left(n''_0 n_0 - n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Calculons l'expression $(\cos \bar{\delta} / \cos \delta_a) - 1$ qui figure aussi dans (6) :

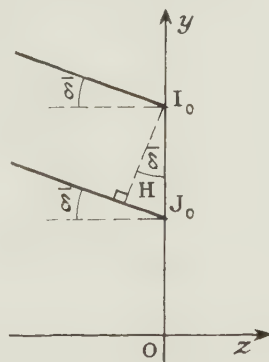


FIG. 5.

$$\frac{1}{\cos \bar{\delta}_a} = (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}_a)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\cos \bar{\delta}} \left[1 + \frac{\varepsilon_a n'_0 n_0}{m^2 \cos^2 \bar{\delta}} + \frac{\varepsilon_a^2}{2 m^2 \cos^2 \bar{\delta}} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right],$$

$$\frac{\cos \bar{\delta}}{\cos \bar{\delta}_a} - 1 = \frac{\varepsilon_a}{m^2 \cos^2 \bar{\delta}} \left[n'_0 n_0 + \frac{\varepsilon_a}{2} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right].$$

d) *Résultats.* —

$$(11) \quad z = \frac{\varepsilon (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}}{m \sin \bar{\delta}} \left[1 - \frac{\varepsilon n'_0 n_0}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} + \frac{\varepsilon^2}{6 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \left(\frac{3 n_0'^2 n_0^2}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} - n''_0 n_0 - n_0'^2 \right) \right].$$

$$(12) \quad \bar{n} = m \sin^2 \bar{\delta} + \frac{\varepsilon_a \cos \bar{\delta}}{a m \sin \bar{\delta}} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta}) + \frac{\varepsilon_a^2 n'_0 n_0}{m \sin \bar{\delta}} \left[\frac{(r-1) n'_0 n_0}{2 m^2 \sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta}} - \frac{n_0^2 \cos \bar{\delta}}{2 a m^2 \sin^2 \bar{\delta}} + \frac{\cos \bar{\delta}}{a} \right],$$

$$(13) \quad \Delta n = n_0 + \varepsilon n'_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} n''_0 - \bar{n},$$

$$(14) \quad \Delta y = \varepsilon - \varepsilon_a + (a - z) \operatorname{tg} \bar{\delta} - \frac{a (r-1) \varepsilon_a}{m^2 \sin \bar{\delta} \cos^2 \bar{\delta}} \left[n'_0 n_0 + \frac{\varepsilon_a}{2} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right],$$

$$(15) \quad \Delta p = \varepsilon_a - \varepsilon_{pa} + (p-1) a \operatorname{tg} \bar{\delta} \left[1 + \frac{n'_0 n_0 \varepsilon_a}{m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos^2 \bar{\delta}} + \frac{\varepsilon_a^2}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos^2 \bar{\delta}} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right] \quad \text{si } 0 < p < 1,$$

$$(16) \quad \Delta p = \varepsilon_a - a \operatorname{tg} \bar{\delta} + \frac{(p-1) a \operatorname{tg} \bar{\delta} \varepsilon_a}{m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos^2 \bar{\delta}} \left[n'_0 n_0 + \frac{\varepsilon_a}{2} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - n_0'^2 n_0^2 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right] \quad \text{si } p < 0.$$

E) ELIMINATION DE ε , ε_a , ε_{pa} . — Nous utiliserons pour calculer ε l'équation (11) de la trajectoire.

ε_a s'obtiendra en faisant $z = a$ et ε_{pa} en faisant $z = p a$. L'inversion de l'équation (11) peut être conduite par approximations successives.

En première approximation,

$$\varepsilon = \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \text{termes en } z^2.$$

En deuxième approximation,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \left(1 - \frac{\varepsilon n'_0 n_0}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right)^{-1} \\ &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \left(1 + \frac{z m n'_0 n_0 \sin \bar{\delta}}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2} m^2 \sin^2 \bar{\delta}} + \text{termes en } z^2 \right) \\ &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \frac{z^2 n'_0 n_0}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} + \text{termes en } z^3.\end{aligned}$$

En troisième approximation,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \left[1 - \frac{\varepsilon n'_0 n_0}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{6 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \left(\frac{3 n_0'^2 n_0^2}{m^2 \sin^2 \bar{\delta}} - n_0'' n_0 - n_0'^2 \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \left[1 + \frac{\varepsilon n'_0 n_0}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \left(\frac{n_0'' n_0 + n_0'^2}{3} - \frac{n_0'^2 n_0^2}{2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}} \right) \right] \\ &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \left[1 + \frac{z n'_0 n_0}{2 m \sin \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \frac{z^2 (n_0'' n_0 + n_0'^2)}{6 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} \right], \\ (17) \quad \varepsilon &= \frac{z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \frac{z^2 n'_0 n_0}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} + \frac{z^3 m (n_0'' n_0 + n_0'^2) \sin \bar{\delta}}{6 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{3/2}}.\end{aligned}$$

Remplaçons ε par sa valeur dans les équations (12) à (16). (12) devient

$$\begin{aligned}(18) \quad \bar{n} &= m \sin^2 \bar{\delta} + \cos \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2} + \frac{a m n'_0 n_0 \sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} + \\ &\quad + \frac{a^2 \cos \bar{\delta}}{6 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{3/2}} \left[m^2 (n_0'' n_0 + n_0'^2) \sin^2 \bar{\delta} + 2 n_0'^2 n_0^2 \right] + \\ &\quad + \frac{a^2 (r-1) n_0'^2 n_0^2}{2 m \cos \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})}.\end{aligned}$$

(14) devient

$$\begin{aligned}\Delta y &= (z - a) \sin \bar{\delta} \left[\frac{m}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1}{\cos \bar{\delta}} \right] + \frac{(z^2 - a^2) n'_0 n_0}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} - \\ &\quad - \frac{(r-1) a^2 n'_0 n_0}{m \cos^3 \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \frac{(z^3 - a^3) m (n_0'' n_0 + n_0'^2) \sin \bar{\delta}}{6 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{3 (r-1) a^3 n_0'^2 n_0^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2 m^2 \cos^4 \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} - \frac{(r-1) a^3 (n_0'' n_0 + n_0'^2) \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2 \cos^2 \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})}.\end{aligned}$$

(13) devient

$$\Delta n = n_0 + \frac{n'_0 z m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \frac{z^2 (n''_0 m^2 \sin^2 \bar{\delta} + n_0'^2 n_0)}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} - \bar{n}.$$

Calculons les valeurs moyennes $\overline{\Delta y}$ et $\overline{\Delta n}$ de Δy et Δn .

La valeur moyenne de z entre 0 et a est $\frac{1}{a} \int_0^a z dz = \frac{a}{2}$,

la valeur moyenne de z^2 entre 0 et a est $\frac{1}{a} \int_0^a z^2 dz = \frac{a^2}{3}$,

la valeur moyenne de z^3 entre 0 et a est $\frac{1}{a} \int_0^a z^3 dz = \frac{a^3}{4}$,

d'où

$$(19) \quad \overline{\Delta y} = \frac{a \sin \bar{\delta}}{2} \left[\frac{1}{\cos \bar{\delta}} - \frac{m}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \right] - \frac{a^2 n'_0 n_0}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} \times \\ \times \left[\frac{1}{3} + \frac{(r-1) (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}}{m \cos^3 \bar{\delta}} \right] - \frac{a^3 m (n''_0 n_0 + n_0'^2) \sin \bar{\delta}}{8 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{3/2}} - \\ - \frac{(r-1) a^3 \sin \bar{\delta}}{2 \cos^3 \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 + \frac{3 n_0'^2 n_0^2}{m^2 \cos^2 \bar{\delta}} \right),$$

$$(20) \quad \overline{\Delta n} = n_0 - \bar{n} + \frac{n'_0 a m \sin \bar{\delta}}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} + \frac{a^2 (n''_0 m^2 \sin^2 \bar{\delta} + n_0'^2 n_0)}{6 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})},$$

$$(21) \quad \overline{\Delta p} = (1-p) a \sin \bar{\delta} \left[\frac{m}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1}{\cos \bar{\delta}} \right] + \frac{(1-p) a^2 n'_0 n_0}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \times \\ \times \left[\frac{1+p}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1}{m \cos^3 \bar{\delta}} \right] - \frac{3(1-p) a^3 \sin \bar{\delta} n_0'^2 n_0^2}{2 m^2 \cos^5 \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} + \\ + \frac{(1-p) a^3 \sin \bar{\delta}}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} (n''_0 n_0 + n_0'^2) \left[\frac{m(1+p+p^2)}{3 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1}{\cos^3 \bar{\delta}} \right]$$

si $0 < p < 1$,

$$(22) \quad \overline{\Delta p} = a \sin \bar{\delta} \left[\frac{m}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1}{\cos \bar{\delta}} \right] + \frac{a^2 n'_0 n_0}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \times \\ \times \left[\frac{1}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1-p}{m \cos^3 \bar{\delta}} \right] - \frac{3(1-p) a^3 \sin \bar{\delta} n_0'^2 n_0^2}{2 m^2 \cos^5 \bar{\delta} (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} + \\ + \frac{a^3 \sin \bar{\delta} (n''_0 n_0 + n_0'^2)}{2 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})} \left[\frac{m}{3 (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} - \frac{1-p}{\cos^3 \bar{\delta}} \right]$$

si $p < 0$.

Les expressions de Δp peuvent être appliquées sous cette forme au cas de l'ombroscopie.

On applique le plus souvent des formules simplifiées correspondant au cas particulier où $\bar{\delta} = 0$. On a alors

$$\Delta p = (1 - p) a^2 n'_0 \left[\frac{1 + p}{2 n_0} - \frac{1}{m} \right] \quad \text{si } 0 < p < 1 ,$$

$$\Delta p = a^2 n'_0 \left[\frac{1}{2 n_0} - \frac{1 - p}{m} \right] \quad \text{si } p < 0 .$$

F) ELIMINATION DE n_0 , n'_0 , n''_0 . — Nous utilisons pour cela l'expression (18) de $\bar{n}$, établie au paragraphe précédent, et nous la dérivons deux fois par rapport à y_0 .

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$A = (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}, \quad A' = (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{-1/2} n'_0 n_0 = n'_0 n_0 / A ,$$

$$A'' = \frac{n''_0 n_0 + n_0'^2}{A} - \frac{n_0'^2 n_0^2}{A^3} ;$$

$$\bar{n} = m \sin^2 \bar{\delta} + A \cos \bar{\delta} + \frac{a m n'_0 n_0 \sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{2 A^2} +$$

$$+ \frac{a^2 \cos \bar{\delta}}{6 A^3} \left[m^2 (n''_0 n_0 + n_0'^2) \sin^2 \bar{\delta} + 2 n_0'^2 n_0^2 \right] + \frac{a^2 (r - 1) n_0'^2 n_0^2}{2 A^2 m \cos \bar{\delta}} ,$$

$$\bar{n}' = \frac{n'_0 n_0 \cos \bar{\delta}}{A} + \frac{a m \sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{2 A^2} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - \frac{2 n_0'^2 n_0^2}{A^2} \right) ,$$

$$\bar{n}'' = \frac{\cos \bar{\delta}}{A} \left(n''_0 n_0 + n_0'^2 - \frac{n_0'^2 n_0^2}{A^2} \right) ;$$

éliminons n''_0 au moyen de l'équation de $\bar{n}''$,

$$n''_0 n_0 + n_0'^2 = (A \bar{n}'' / \cos \bar{\delta}) + (n_0'^2 n_0^2 / A^2) ;$$

éliminons n'_0 au moyen de l'équation de $\bar{n}'$ et de l'expression ci-dessus :

$$\bar{n}' = \frac{n'_0 n_0 \cos \bar{\delta}}{A} + \frac{a m \sin \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{2 A^2} \left(\frac{A \bar{n}''}{\cos \bar{\delta}} - \frac{n_0'^2 n_0^2}{A^2} \right) .$$

En première approximation, on néglige les termes en $n_0'^2$ et n'' et on trouve $n_0 n'_0 = \bar{n}' A / \cos \bar{\delta}$, d'où, en ne négligeant que les termes du troisième ordre,

$$n_0'^2 n_0^2 = \bar{n}^2 A^2 / \cos^2 \bar{\delta}, \quad n''_0 n_0 + n_0'^2 = (A \bar{n}'' / \cos \bar{\delta}) + (\bar{n}^2 / \cos^2 \bar{\delta}) ,$$

$$n'_0 n_0 = \frac{1}{\cos \bar{\delta}} \left(\bar{n}' A - \frac{a m \bar{n}'' \sin \bar{\delta}}{2} + \frac{a m \bar{n}^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2 A} \right) .$$

Éliminons n_0 et A . En reportant les deux expressions ci-dessus dans l'équation de $\bar{n}$, il vient

$$\bar{n} = m \sin^2 \bar{\delta} + A \cos \bar{\delta} + \frac{a m \sin \bar{\delta}}{2 A} \bar{n}' - \frac{a^2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12 A^2} \bar{n}'' + \\ + \frac{a^2 \bar{n}'^2}{A^3 \cos \bar{\delta}} \left[\frac{5 m^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12} + \frac{A^2}{3} + \frac{(r-1) A^3}{2 m \cos^2 \bar{\delta}} \right]$$

ou encore

$$(m \sin^2 \bar{\delta} - \bar{n}) A^3 + A^4 \cos \bar{\delta} + \frac{a m \sin \bar{\delta}}{2} A^2 \bar{n}' - \\ - \frac{a^2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12} A \bar{n}'' + \frac{a^2 \bar{n}'^2}{\cos \bar{\delta}} \left[\frac{5 m^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12} + \frac{A^2}{3} + \frac{(r-1) A^3}{2 m \cos^2 \bar{\delta}} \right] = 0.$$

Pour tirer A de cette équation, nous poserons $A = \alpha + \beta \bar{n}' + \gamma \bar{n}'^2 + \xi \bar{n}''$, d'où

$$A^2 = \alpha^2 + 2 \alpha \beta \bar{n}' + (\beta^2 + 2 \alpha \gamma) \bar{n}'^2 + 2 \alpha \xi \bar{n}'',$$

$$A^3 = \alpha^3 + 3 \alpha^2 \beta \bar{n}' + 3 \alpha (\beta^2 + \alpha \gamma) \bar{n}'^2 + 3 \alpha^2 \xi \bar{n}'',$$

$$A^4 = \alpha^4 + 4 \alpha^3 \beta \bar{n}' + 2 \alpha^2 (3 \beta^2 + 2 \alpha \gamma) \bar{n}'^2 + 4 \alpha^3 \xi \bar{n}''.$$

L'équation devient alors une identité et nous annulerons successivement chacun des coefficients :

$$\text{terme constant, } \alpha^3 (m \sin^2 \bar{\delta} - \bar{n}) + \alpha^4 \cos \bar{\delta} = 0 ;$$

$$\text{terme en } \bar{n}', \quad 3 \alpha^2 \beta (m \sin^2 \bar{\delta} - \bar{n}) + 4 \alpha^3 \beta \cos \bar{\delta} + \alpha^2 \frac{a m \sin \bar{\delta}}{2} = 0 ;$$

$$\text{terme en } \bar{n}'^2, \quad 3 \alpha (\beta^2 + \alpha \gamma) (m \sin^2 \bar{\delta} - \bar{n}) + 2 \alpha^2 (3 \beta^2 + 2 \alpha \gamma) \cos \bar{\delta} + \\ + \alpha \beta a m \sin \bar{\delta} + \left(\frac{5 m^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12} + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{(r-1) \alpha^3}{2 m \cos^2 \bar{\delta}} \right) \frac{a^2}{\cos \bar{\delta}} = 0 ;$$

$$\text{terme en } \bar{n}'', \quad 3 \alpha^2 \xi (m \sin^2 \bar{\delta} - \bar{n}) + 4 \alpha^3 \xi \cos \bar{\delta} - \alpha \frac{a^2 m^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12} = 0.$$

De ces quatre équations, on tire successivement :

$$\alpha = \frac{\bar{n} - m \sin^2 \bar{\delta}}{\cos \bar{\delta}}, \quad \beta = - \frac{a m \sin \bar{\delta}}{2 (\bar{n} - m \sin^2 \bar{\delta})},$$

$$\gamma = - \left[\frac{a^2 (r-1)}{2 m \cos^4 \bar{\delta}} + \frac{2 a^2 m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{3 (\bar{n} - m \sin^2 \bar{\delta})^3} + \frac{a^2}{3 \cos \bar{\delta} (\bar{n} - m \sin^2 \bar{\delta})} \right],$$

$$\xi = \frac{a^2 m^2 \sin^2 \bar{\delta} \cos \bar{\delta}}{12 (\bar{n} - m \sin^2 \bar{\delta})^2}.$$

Nous avons posé au départ que la quantité $\bar{n} - m$ était un infiniment petit d'ordre 1. On a donc $\bar{n} - m \sin^2 \bar{\delta} = m \cos^2 \bar{\delta} + (\bar{n} - m)$ et, dans le second ordre,

$$A = m \cos \bar{\delta} + \left(\frac{\bar{n} - m}{\cos \bar{\delta}} - \frac{\bar{n}' a \sin \bar{\delta}}{2 \cos^2 \bar{\delta}} \right) + \frac{\bar{n}' (\bar{n} - m) a \sin \bar{\delta}}{2 m \cos^4 \bar{\delta}} +$$

$$+ \frac{\bar{n}'' a^2 \sin^2 \bar{\delta}}{12 \cos^3 \bar{\delta}} - \frac{a^2 \bar{n}'^2}{m \cos^3 \bar{\delta}} \left(\frac{1}{3} + \frac{r-1}{2 \cos \bar{\delta}} + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{3} \right).$$

De $A = (n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}$ on tire $n_0 = (A + m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}$ et, dans le second ordre,

$$n_0 = m + \left(\bar{n} - m - \frac{\bar{n}' a \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2} \right) + \frac{(\bar{n} - m)^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{2m} + \frac{(\bar{n} - m) \bar{n}' a \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2m} + \\ + \frac{\bar{n}'' a^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{12} - \frac{a^2 \bar{n}'^2}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left(\frac{1}{3} + \frac{r-1}{2 \cos \bar{\delta}} + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{3} - \frac{\sin^4 \bar{\delta}}{8 \cos^2 \bar{\delta}} \right),$$

$$n'_0 n_0 = m \bar{n}' + \frac{\bar{n}' (\bar{n} - m)}{\cos^2 \bar{\delta}} - \frac{\bar{n}' a m \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2}, \quad n_0'^2 = \bar{n}'^2, \quad n_0'' = \bar{n}'' + \frac{\bar{n}'^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{m}.$$

G) RÉSULTATS. — Avec une approximation du second ordre, c'est-à-dire en négligeant les termes en $(\bar{n} - m)^3$ et les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 3 de $\bar{n}$, en négligeant de plus les termes en $1/t$, on exprime les erreurs dues à la réfraction sous la forme suivante :

$$(23) \quad \overline{\Delta n} = - \frac{a^2 \bar{n}'^2}{2m \cos^3 \bar{\delta}} \left(r - 1 + \frac{1}{3 \cos \bar{\delta}} - \frac{\sin^4 \bar{\delta}}{12 \cos \bar{\delta}} \right) + \frac{(\bar{n} - m)^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{2m},$$

$$(24) \quad \overline{\Delta y} = \frac{a (\bar{n} - m) \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2m \cos^2 \bar{\delta}} - \frac{a^2 \bar{n}'}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{4} + \frac{1}{3} + \frac{r-1}{\cos^2 \bar{\delta}} \right) + \\ + \frac{a^2 \bar{n}' (\bar{n} - m)}{m^2 \cos^4 \bar{\delta}} \left(\frac{3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{a (\bar{n} - m)^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{2m^2 \cos^4 \bar{\delta}} + \frac{a^3 \bar{n}'' \operatorname{tg} \bar{\delta}}{24m \cos^4 \bar{\delta}} - \\ - \frac{a^3 \bar{n}'^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{24m^2 \cos^6 \bar{\delta}} \left[11 + 4 \cos^2 \bar{\delta} + 6(r-1)(\cos \bar{\delta} + 10) \right],$$

$$(25) \quad \Delta p = \frac{(1-p)a}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left\{ -(\bar{n} - m) \operatorname{tg} \bar{\delta} + \frac{a \bar{n}'}{2} (p-1 - \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}) + \right. \\ + \frac{(\bar{n} - m)^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{m \cos^2 \bar{\delta}} - \frac{a^2 \bar{n}'' \operatorname{tg} \bar{\delta}}{12} \left(\operatorname{tg}^2 \bar{\delta} + 1 + p - 2p^2 \right) - \frac{a \bar{n}' (\bar{n} - m)}{2m \cos^2 \bar{\delta}} \times \\ \times \left(3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta} + 1 + p \right) + \frac{a^2 \bar{n}'^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left[-\frac{13}{6} + \frac{r-1}{2 \cos \bar{\delta}} - \frac{19 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{12} + \frac{(2+p)^2}{6} \right] \left. \right\}$$

si $0 < p < 1$,

$$(26) \quad \Delta p = \frac{a}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left\{ -(\bar{n} - m) \operatorname{tg} \bar{\delta} + \frac{a \bar{n}' (2p-1)}{2 \cos^2 \bar{\delta}} + \frac{(\bar{n} - m)^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{m \cos^2 \bar{\delta}} - \right. \\ - \frac{a^2 \bar{n}'' \operatorname{tg} \bar{\delta}}{12 \cos^2 \bar{\delta}} - \frac{a \bar{n}' (\bar{n} - m)}{2m \cos^2 \bar{\delta}} (3 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta} + 1) + \\ + \frac{a^2 \bar{n}'^2 \operatorname{tg} \bar{\delta}}{m \cos^2 \bar{\delta}} \left[1 + \frac{5(p-1)}{2 \cos^2 \bar{\delta}} + \frac{r-1}{2 \cos \bar{\delta}} + \frac{11 \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}}{12} \right] \left. \right\} \quad \text{si } p < 0.$$

Dans le cas de la strioscopie interférentielle, les erreurs $\overline{\Delta y}$ et Δp ne sont pas changées.

L'erreur $\overline{\Delta n}$ n'a pas de signification ; on mesure, non les indices n , mais les variations de l'indice entre un point de hauteur y variable et le point de hauteur $y + d$. Lorsque d est suffisamment petit, on assimile le gradient n' à la quantité mesurée $[n(y) - n(y + d)]/d$. Dans ces conditions, l'erreur strioscopique $\overline{\Delta n'}$ commise se calcule en différentiant l'erreur interférométrique $\overline{\Delta n}$. Elle s'écrit

$$(27) \quad \overline{\Delta n'} = -\frac{a^2 \bar{n}'' \bar{n}'}{m \cos^3 \bar{\delta}} \left(r - 1 + \frac{1}{3 \cos \bar{\delta}} - \frac{\sin^4 \bar{\delta}}{12 \cos \bar{\delta}} \right) + \operatorname{tg}^2 \bar{\delta} \frac{\bar{n}'(\bar{n} - m)}{m}.$$

Lorsque le milieu est bidimensionnel, on se place pratiquement toujours, pour les expériences, dans le cas particulier $\bar{\delta} = 0$. On a alors les formules simplifiées suivantes :

$$(28) \quad \overline{\Delta n} = -a^2 \bar{n}'^2 (3r - 2)/6m,$$

$$(29) \quad \overline{\Delta y} = -\frac{a^2 \bar{n}'}{3m} \left(3r - 2 - \frac{\bar{n} - m}{m} \right),$$

$$(30) \quad \Delta p = \frac{1-p}{2m} a^2 \bar{n}' \left[p - 1 - \frac{\bar{n} - m}{m} (p + 1) \right] \quad \text{si } 0 < p < 1,$$

$$(31) \quad \Delta p = \frac{a^2 \bar{n}'}{2m} \left(2p - 1 - \frac{\bar{n} - m}{m} \right) \quad \text{si } p < 0,$$

$$(32) \quad \overline{\Delta n'} = -\frac{a^2 \bar{n}'' \bar{n}'}{3m} (3r - 2).$$

On retrouve dans ces dernières formules un résultat connu et contrôlé expérimentalement par Svensson [8] à savoir : les corrections à faire sur les striogrammes et les interférogrammes pour tenir compte de la réfraction, se réduisent à des corrections d'ordre supérieur si on prend la précaution de faire la mise au point dans un plan placé au tiers aval de l'épaisseur perturbée :

plan $r = 2/3$ ou $z = 2a/3$ (fig. 6).

3. Interprétation des résultats. Ordre de grandeur des erreurs dues à la réfraction. — A) ERREURS SUR LES INTERFÉROGRAMMES ($\overline{\Delta n}$ et $\overline{\Delta y}$). — Le dépouillement d'un interférogramme a pour but de construire la courbe $n = f(y)$. La pente de cette courbe est n' .

La courbe $n = f(y)$ réelle est confondue avec la courbe $\bar{n} = f(y)$ expérimentale si les erreurs $\overline{\Delta n}$ et $\overline{\Delta y}$ dues à la réfraction sont négligeables ou bien si ces deux erreurs sont dans le rapport n' .

On voit que le deuxième cas n'est pas réalisé. Dans le cas particulier où $\bar{\delta} = 0$, on a $\overline{\Delta n}/\overline{\Delta y} = +\bar{n}'/2$ en négligeant le terme de deuxième ordre dans $\overline{\Delta y}$.

On doit comparer $\overline{\Delta n}$ et $\overline{\Delta y}$ à la précision donnée par l'interféromètre. Pour étudier cette précision, il faut distinguer deux sortes d'interférogrammes.

a) On observe les franges d'égale épaisseur. Une différence de marche, donc une perturbation de l'indice du milieu à étudier, se traduit par une

variation de l'interfrange. La diffraction limite la précision des dépouillements.

b) On observe les franges d'égale inclinaison. Une différence de marche se traduit alors par un déplacement du système de franges. La diffraction limite alors le champ d'observation des franges et non plus la précision du dépouillement.

De nombreux chercheurs ont travaillé sur les franges d'égale inclinaison, spécialement dans des études sur la diffusion des liquides. L'appareillage utilisé était un interféromètre de Rayleigh plus ou moins modifié [3, 4, 5, 8].

Ces appareils ne sont pas utilisés actuellement en soufflerie et c'est pourquoi nous nous limitons ici aux franges d'égale épaisseur.

Nous supposons tout d'abord l'angle d'incidence $\bar{\delta}$ nul. L'interfrange i est la variation de hauteur dans le milieu perturbé qui introduit une variation du chemin optique d'une longueur d'onde.

A une variation dy de hauteur, correspond une variation dn de l'indice telle que $dn = n' dy$ et une variation du chemin optique $a dn$ telle que $a dn = a n' dy$. Donc l'interfrange i est tel que $|a \bar{n}'| i = \lambda$, $i = \lambda / |a \bar{n}'|$.

Nous supposons les optiques de l'interféromètre suffisamment corrigées des aberrations pour que seule la diffraction limite leur résolution. Si ν est le nombre d'ouverture de l'optique de sortie, le diamètre de la tache de diffraction est, dans le plan d'observation, $2 \lambda \nu$. Un observateur, même exercé, ne peut résoudre deux points séparés par moins que $\lambda \nu$.

Soit G le grandissement de l'optique de sortie, la précision donnée par l'interféromètre est une fraction $1/k$ de l'interfrange i telle que $G i/k \geq \lambda \nu$.

La précision donnée par l'appareil est donc i/k telle que $k = G / |a \bar{n}'| \nu$. On suppose l'observateur nanti de moyens de dépouillement lui permettant d'atteindre cette précision (viseur, comparateur ou agrandisseur suffisamment puissants).

De même, on suppose que le récepteur ne limite pas non plus cette résolution. Soit σ la plus petite distance séparée par le récepteur.

On a $\sigma \leq \lambda \nu$ qui s'écrit encore $\sigma \leq G \lambda / k |a \bar{n}'|$.

Un interféromètre ne permet de voir que des gradients n' faibles ; les franges, en effet, se resserrent quand le gradient croît et elles disparaissent tout à fait si le gradient devient trop grand. La condition pour que les franges existent est que les faisceaux correspondant aux deux trajets de l'interféromètre traversent tous deux l'optique de sortie.

L'optique de sortie est composée généralement de deux objectifs (fig. 7) :

un objectif du type collecteur qui focalise les faisceaux,

un objectif dit de mise au point qui forme l'image du champ dans le plan d'ob-

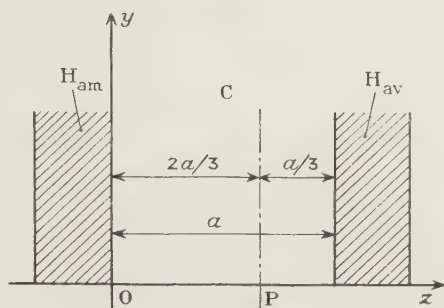


FIG. 6. — Plan P de mise au point annulant les erreurs de réfraction autres que la déformation du profil : Oz, sens de la lumière ; H_{arn}, hublot amont ; C, chambre d'expérience ; H_{av}, hublot aval.

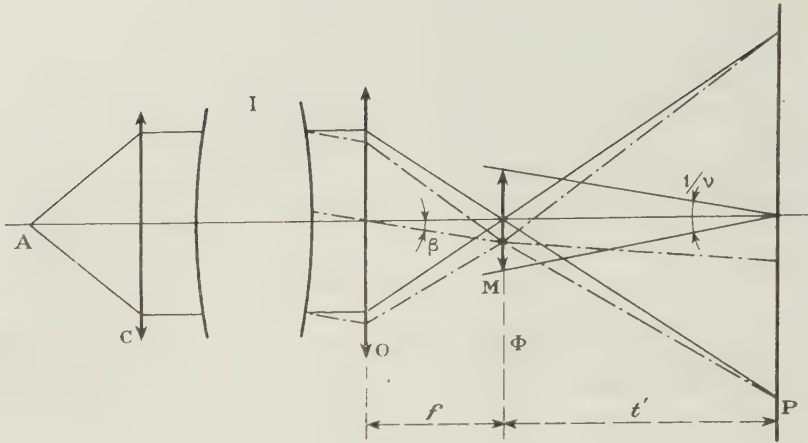


FIG. 7. — Optique de sortie d'un interféromètre I : O, objectif collecteur ; M, objectif de mise au point. A, source ; C, objectif collimateur ; P, plan d'observation.

servation.

Le premier objectif donne de la source A (pupille du système) deux images dans son plan focal, chaque image correspondant à l'un des trajets de l'interféromètre. Pour que les franges existent, il faut que l'objectif de mise au point reçoive à la fois les deux faisceaux. Pour diminuer le plus possible le diamètre de cet objectif, on le place habituellement dans le plan image de la source. Avec notre réglage où t est infini, c'est le plan focal de l'objectif collecteur. Dans ce plan, la distance des deux images de la source est $f | \operatorname{tg} \beta |$, où β est la déviation angulaire totale du faisceau perturbé et f la longueur focale de l'objectif collecteur.

Par définition $\beta = \delta_a - \bar{\delta}$. Nous pouvons, en première approximation, assimiler les angles à leurs tangentes et, dans le premier ordre, on a (équation du § 2.2 Db)

$$\operatorname{tg} \beta \simeq \beta \simeq \delta_a - \delta_0 \simeq \operatorname{tg} \delta_a - \operatorname{tg} \delta_0 \simeq \operatorname{tg} \delta_0 \frac{n'_0 n_0 \varepsilon_a}{m^2 \sin^2 \delta_0 \cos^2 \delta_0}.$$

Toujours dans le premier ordre, on a trouvé :

$$\bar{\delta} = \delta_0 \quad (\S 2.2 \text{ Dc}),$$

$$\varepsilon_a = \frac{a m \sin \bar{\delta}}{(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2}} \quad (\S 2.2 \text{ E}),$$

$$(n_0^2 - m^2 \sin^2 \bar{\delta})^{1/2} = m \cos \bar{\delta}, \quad n_0 = m, \quad n'_0 = \bar{n}' \quad (\S 2.2 \text{ F}),$$

d'où $\operatorname{tg} \beta \simeq a \bar{n}' / m \cos^4 \bar{\delta}$ et ici, puisque $\bar{\delta} = 0$, $\operatorname{tg} \beta = a \bar{n}' / m$. Appelons Φ le diamètre de l'objectif de mise au point. Pour que les franges d'interférence existent, il faut que $\Phi > f | \operatorname{tg} \beta |$. Si t' est le tirage image de l'objectif de mise au point, on a $\Phi/t' = 1/\nu$, donc l'inégalité s'écrit $t'/\nu > f | a \bar{n}' | / m$ et, comme t'/f représente le grandissement G de l'optique de sortie, $| a \bar{n}' | < m G/\nu$.

Du fait que les erreurs dues à la réfraction sont dans un rapport de l'ordre de $\bar{n}'$, $\overline{\Delta n}/\overline{\Delta y} = + \bar{n}'/2$, on voit qu'elles ont sensiblement la même importance et sont négligeables en même temps. Etudions donc l'erreur la plus importante

$$\overline{\Delta y} = -\frac{a^2 \bar{n}'}{3 m} (3 r - 2) .$$

Elle introduit une différence de marche parasite

$$a \bar{n}' \overline{\Delta y} = -\frac{a^3 \bar{n}'^2}{3 m} (3 r - 2) .$$

Cette erreur est visible si elle provoque une variation de l'interfrange supérieure à la précision $i/k = \lambda v/G$ de l'interféromètre, donc si

$$\frac{a^3 \bar{n}'^2}{3 m} | 3 r - 2 | > \frac{\lambda v}{G} .$$

Pour que l'erreur de réfraction $\overline{\Delta y}$ soit visible, il faut que le gradient $\bar{n}'$ satisfasse à l'inéquation

$$| a \bar{n}' | > \sqrt{\frac{3 \lambda m v}{G a | 3 r - 2 |}} .$$

De même, l'erreur $\overline{\Delta n}$ devient visible lorsque le gradient $\bar{n}'$ atteint une valeur telle que

$$| a \bar{n}' | > \sqrt{\frac{6 \lambda m v}{G a | 3 r - 2 |}} .$$

Comme $G = t'/f$ et $v = t' \Phi$, on a $G/v = \Phi/f$. Les erreurs dues à la réfraction interviennent lorsque

$$| a \bar{n}' | > \sqrt{\frac{3 \lambda m}{a | 3 r - 2 |} \frac{f}{\Phi}} ;$$

les gradients mesurables sont ceux tels que $| a \bar{n}' | < m \Phi/f$. Ces deux inéquations peuvent être compatibles ou incompatibles.

Si $\Phi/f \leq \sqrt[3]{3 \lambda / (m a | 3 r - 2 |)}$ elles sont incompatibles. Aucun gradient mesurable ne peut donner lieu à une correction des erreurs de réfraction. Celles-ci sont toujours négligeables.

Si $\Phi/f > \sqrt[3]{3 \lambda / (m a | 3 r - 2 |)}$ des gradients suffisamment forts peuvent nécessiter une correction des erreurs de réfraction.

Etudions la limite qui sépare les deux cas.

Dans les souffleries on a $m \simeq 1$. Dans nos expériences, nous avons choisi d'étudier la diffusion dans l'eau d'un produit miscible à l'eau. On avait donc $m \simeq 4/3$. Le tableau I donne la valeur limite de Φ/f dans plusieurs cas d'expériences. Les longueurs d'onde choisies pour les applications numériques sont celles de raies du mercure.

Sur la figure 8, on a porté en abscisse la position du plan de mise au point (facteur r) et en ordonnée l'angle d'ouverture Φ/f de l'optique de sortie. Cette figure correspond au cas de nos expériences : $\lambda = 4\,358 \text{ \AA}$ (raie bleue du mercure), $m = 1,33$.

Pour une épaisseur de la veine d'expérience $a = 100 \text{ mm}$, on peut sur le gra-

TABLEAU I. — Valeurs limites de Φ/f

		$\lambda = 5460 \text{ \AA}$					$\lambda = 4915 \text{ \AA}$					$\lambda = 4358 \text{ \AA}$				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
		$\frac{1}{1/3}$	$\frac{4/3}{0}$	$\frac{5/3}{-1/3}$	$\frac{2}{-2/3}$	$\frac{7/3}{-1}$	$\frac{1}{1/3}$	$\frac{4/3}{0}$	$\frac{5/3}{-1/3}$	$\frac{2}{-2/3}$	$\frac{7/3}{-1}$	$\frac{1}{1/3}$	$\frac{4/3}{0}$	$\frac{5/3}{-1/3}$	$\frac{2}{-2/3}$	$\frac{7/3}{-1}$
$a =$	1	0,117 9	0,093 6	0,081 7	0,074 3	0,068 9	0,113 8	0,090 3	0,078 9	0,071 7	0,066 6	0,109 3	0,086 8	0,075 8	0,068 9	0,063 9
	2	0,093 6	0,074 3	0,064 9	0,058 9	0,054 7	0,090 3	0,071 7	0,062 6	0,056 9	0,052 8	0,086 8	0,068 9	0,060 2	0,054 7	0,050 7
	3	0,081 7	0,064 9	0,056 7	0,051 5	0,047 8	0,078 9	0,062 6	0,054 7	0,049 6	0,046 1	0,075 8	0,060 2	0,052 5	0,047 8	0,044 3
	5	0,068 9	0,054 7	0,047 8	0,043 4	0,040 3	0,066 6	0,052 8	0,046 1	0,041 9	0,038 9	0,063 9	0,050 7	0,044 3	0,040 3	0,037 4
	10	0,054 7	0,043 4	0,037 9	0,034 5	0,032 0	0,052 8	0,041 9	0,036 6	0,033 3	0,030 9	0,050 7	0,040 3	0,035 2	0,031 9	0,029 6
	20	0,043 4	0,034 5	0,030 1	0,027 4	0,025 4	0,041 9	0,033 3	0,029 0	0,026 4	0,024 5	0,040 3	0,032 0	0,027 9	0,025 4	0,023 5
	30	0,037 9	0,030 1	0,026 3	0,023 9	0,022 2	0,036 6	0,029 0	0,025 4	0,023 1	0,021 4	0,035 2	0,027 9	0,024 4	0,022 2	0,020 6
	50	0,032 0	0,025 4	0,022 2	0,020 2	0,018 7	0,030 9	0,024 5	0,021 4	0,019 5	0,018 1	0,029 7	0,023 5	0,020 6	0,018 7	0,017 4
	100	0,025 4	0,020 2	0,017 6	0,016 0	0,014 9	0,024 5	0,019 5	0,017 0	0,015 4	0,014 3	0,023 5	0,018 7	0,016 3	0,014 8	0,013 8
	200	0,020 2	0,016 0	0,014 0	0,012 7	0,011 8	0,019 5	0,015 4	0,013 5	0,012 3	0,011 4	0,018 7	0,014 8	0,013 0	0,011 8	0,010 9
	300	0,017 6	0,014 0	0,012 2	0,011 1	0,010 3	0,017 0	0,013 5	0,011 8	0,010 7	0,009 9	0,016 3	0,013 0	0,011 3	0,010 3	0,009 6
	500	0,014 9	0,011 8	0,010 3	0,009 4	0,008 7	0,014 3	0,011 4	0,009 9	0,009 0	0,008 4	0,013 8	0,010 9	0,009 6	0,008 7	0,008 1
	1 000	0,011 8	0,009 4	0,008 2	0,007 4	0,006 9	0,011 4	0,009 0	0,007 9	0,007 2	0,006 7	0,010 9	0,008 7	0,007 6	0,006 9	0,006 4
$a =$	1	0,107 1	0,085 0	0,074 2	0,067 5	0,062 6	0,103 4	0,082 0	0,071 7	0,065 1	0,060 5	0,099 3	0,078 9	0,068 9	0,062 6	0,058 1
	2	0,085 0	0,067 5	0,059 0	0,053 5	0,049 7	0,082 0	0,065 1	0,056 9	0,051 7	0,048 0	0,078 9	0,062 6	0,054 7	0,049 7	0,046 1
	3	0,074 2	0,059 0	0,051 5	0,046 8	0,043 4	0,071 7	0,056 9	0,049 7	0,045 1	0,041 9	0,068 9	0,054 7	0,047 7	0,043 4	0,040 2
	5	0,062 6	0,049 7	0,043 4	0,039 4	0,037 6	0,060 5	0,048 0	0,041 9	0,038 1	0,035 3	0,058 1	0,046 1	0,040 2	0,036 6	0,034 0
	10	0,049 7	0,039 4	0,034 4	0,031 3	0,029 1	0,048 0	0,038 1	0,033 3	0,030 3	0,028 1	0,046 1	0,036 5	0,032 0	0,029 0	0,026 9
	20	0,039 4	0,031 3	0,027 3	0,024 9	0,023 1	0,038 1	0,030 3	0,026 3	0,024 0	0,022 3	0,036 6	0,029 1	0,025 3	0,023 1	0,021 4
	30	0,034 4	0,027 3	0,023 9	0,021 7	0,020 2	0,033 3	0,026 3	0,023 1	0,021 0	0,019 4	0,032 0	0,025 3	0,022 2	0,020 2	0,018 7
	50	0,029 1	0,023 1	0,020 2	0,018 4	0,017 0	0,028 1	0,022 3	0,019 4	0,017 7	0,016 4	0,027 0	0,021 4	0,018 7	0,017 0	0,015 8
	100	0,023 1	0,018 4	0,016 0	0,014 5	0,013 5	0,022 3	0,017 0	0,015 4	0,014 0	0,013 0	0,021 4	0,017 0	0,014 8	0,013 4	0,012 5
	200	0,018 4	0,014 5	0,012 7	0,011 5	0,010 7	0,017 0	0,014 0	0,012 3	0,011 2	0,010 4	0,017 0	0,013 4	0,011 8	0,010 7	0,009 9
	300	0,016 0	0,012 7	0,011 1	0,010 1	0,009 4	0,015 4	0,012 3	0,010 7	0,009 7	0,009 0	0,014 8	0,011 8	0,010 3	0,009 4	0,008 7
	500	0,013 5	0,010 7	0,009 4	0,008 5	0,007 9	0,013 0	0,010 4	0,009 0	0,008 2	0,007 6	0,012 5	0,009 9	0,008 7	0,007 9	0,007 4
	1 000	0,010 7	0,008 5	0,007 4	0,006 7	0,006 3	0,010 3	0,008 2	0,007 2	0,006 5	0,006 1	0,009 9	0,007 9	0,006 9	0,006 3	0,005 8

Cas des soufflées $m \geq 1$ Cas de la diffusion $m = 4/3$

phique séparer deux zones. Dans la zone inférieure (zone quadrillée), les erreurs dues à la réfraction sont négligeables pour tous les gradients visibles. Dans la zone supérieure, certains gradients forts produisent des erreurs de réfraction dont il faut tenir compte. La correction de ces erreurs peut alors s'effectuer à l'aide des formules (28) et (29).

On a fait figurer sur le graphique (fig. 8) les deux mêmes régions relatives à une épaisseur de la veine $a = 10$ mm. L'interféromètre utilisé pour nos expériences présente les deux caractéristiques suivantes: $f = 322$ mm, $\Phi = 10$ mm, donc $\Phi/f = 0,031$. Nous avons porté cette droite sur le graphique.

Dans les conditions de nos expériences, on peut choisir le plan de mise au point de façon que, pour l'épaisseur $a = 10$ mm, il n'y ait jamais de correction à faire sur l'interférogramme et que, au contraire, pour l'épaisseur $a = 100$ mm, les erreurs dues à la réfraction interviennent parfois. Il suffit alors, pour faire la mesure des erreurs de réfraction, de comparer les deux interférogrammes $a = 10$ mm et $a = 100$ mm. C'est le principe des expériences que nous avons montées pour cette étude.

Supposons que, dans une telle expérience, la mise au point soit faite dans le plan $z = -a/3$ ou $z = 5a/3$, c'est-à-dire $|3r - 2| = 3$. Voyons quels gradients $\bar{n}'$ doivent être réalisés dans les cuves à expériences.

Pour que le gradient soit mesurable, il doit être

$$|\bar{n}'| \leq \frac{m \Phi}{a f}.$$

Avec $a = 100$ mm, on trouve $\bar{n}' < 4,13 \times 10^{-4}$ mm⁻¹. L'erreur $\bar{\Delta y}$ due à la réfraction est visible si

$$|\bar{n}'| > \frac{1}{a} \sqrt{\frac{3 \lambda m}{a |3r - 2| \Phi}}.$$

Pour $a = 100$ mm, l'erreur $\bar{\Delta y}$ est visible à partir de $|\bar{n}'| > 1,37 \times 10^{-4}$ mm⁻¹. De même, l'erreur $\bar{\Delta n}$ est visible à partir de $|\bar{n}'| > 1,94 \times 10^{-4}$ mm⁻¹. Pour $a = 10$ mm, les deux erreurs sont toujours négligeables si $|\bar{n}'| < 4,32 \times 10^{-3}$ mm⁻¹.

On voit que dans le domaine de gradient bien restreint

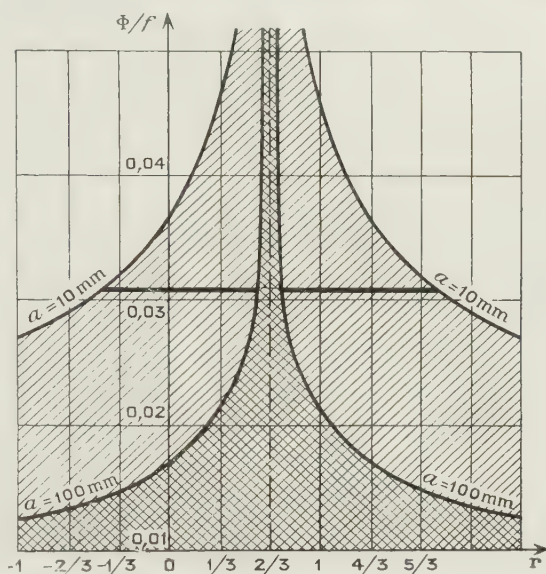


FIG. 8.— Ouverture limite de l'objectif de mise au point. Zones où les erreurs dues à la réfraction sont négligeables : zone quadrillée, $a = 100$ mm ; zone hachurée, $a = 10$ mm.

$1,37 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1} < |\bar{n}'| < 4,13 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$, on peut, pour l'épaisseur $a = 100 \text{ mm}$, mesurer les erreurs de réfraction. En réalité, les deux limites sont du même ordre de grandeur, donc les erreurs restent toujours de l'ordre de la précision donnée par l'interféromètre. La précision de l'interféromètre est, du fait de la diffraction, $\sigma = \lambda v$, $\sigma = \lambda G f/\Phi$. Dans notre appareil, G est voisin de 1,2, d'où $\sigma = 17 \mu$.

Les pellicules photographiques peuvent donner cette précision, mais difficilement mieux. C'est pourquoi, il serait illusoire d'augmenter l'ouverture Φ/f sans augmenter G . Une augmentation simultanée de G et Φ/f , suffisante pour rendre importantes les erreurs dues à la réfraction, entraîne un encombrement prohibitif de l'appareil.

Les erreurs deviennent plus importantes si l'on s'éloigne beaucoup du plan optimum $z = 2a/3$. Mais ces conditions ne correspondent à rien de pratique; on fait toujours, avec une précision plus ou moins grande, la localisation des franges d'interférences et la mise au point dans un même plan intérieur à la veine.

En fait, de nombreux utilisateurs ont déjà choisi systématiquement le plan $z = 2a/3$ pour éviter toute difficulté due à la réfraction.

Le calcul que nous avons effectué ici montre que la tolérance sur le choix de ce plan est extrêmement grande et il permet de chiffrer cette tolérance dans chaque cas particulier.

En conclusion, pour une variation continue de l'indice, on peut, le plus souvent, négliger les erreurs provoquées sur les interférogrammes par la réfraction des rayons lumineux.

B) ERREURS SUR LES STRIOGRAMMES. — Comme dans le cas de l'interféromètre, les deux erreurs $\overline{\Delta y}$ et $\overline{\Delta n'}$ sont de même importance. Elles ne se compensent que dans le cas particulier où $\delta = 0$ et où le terme en $\bar{n} - m$ est négligeable. On a alors $\overline{\Delta n'}/\overline{\Delta y} = \bar{n}''$; autrement dit, la courbe $n' = f(y)$ obtenue par dépouillement du striogramme n'est pas modifiée par la réfraction.

Dans le cas général, soit d le dédoublement de l'appareil, l'interfrange observé sur le striogramme est $i = \lambda/|\bar{n}''| da$.

La résolution de l'appareil est λv comme dans le cas de l'interféromètre. G désigne toujours le grandissement et σ le pouvoir de résolution du récepteur.

On a, comme précédemment, deux conditions de bonne utilisation de l'appareil : dépouillement à une précision i/k telle que $i/k \geq \lambda v/G$; récepteur permettant cette précision, $\sigma \leq \lambda v$.

L'erreur $\overline{\Delta n'}$ et l'erreur $\overline{\Delta y}$ sont visibles si elles introduisent une variation de l'interfrange supérieure à i/k : $|\overline{\Delta y}| > i/k$ ou $|\overline{\Delta n'}/\bar{n}''| > i/k$; on a $v/G = f/\Phi$, mais Φ désigne ici le diamètre du biprisme de striescopie interférentielle, car on choisit toujours l'objectif de mise au point suffisamment ouvert pour ne pas diaphragmer la lumière transmise par le biprisme.

Les erreurs dues à la réfraction modifient le striogramme si $|\overline{\Delta y}| > \lambda f/\Phi$ ou $|\overline{\Delta n'}/\bar{n}''| > \lambda f/\Phi$.

Un appareil de striescopie interférentielle permet de voir des gradients aussi forts que l'on veut, du moment que ces gradients ne varient pas trop vite. C'est

la valeur de $\bar{n}''$, non celle de $\bar{n}'$, qui limite l'utilisation de l'appareil. Donc les inéquations ci-dessus sont la seule condition à retenir.

C) DÉFORMATION DU PROFIL. — L'erreur Δp est de même ordre que $\overline{\Delta y}$, mais on ne peut pas l'annuler par un artifice de réglage, comme les autres erreurs de réfraction. Elle ne modifie pas l'interférogramme ou le striogramme, mais elle déforme tous les objets placés dans la veine ou en amont de celle-ci. Donc, elle fausse les références utilisées pour le dépouillement des striogrammes et interférogrammes.

De plus, dans des zones où les franges n'existent plus, soit parce que le gradient est trop élevé (interférométrie), soit parce que sa variation est trop brutale (strioscopie interférentielle), on continue à voir le profil ou tout autre objet.

On peut alors utiliser cette déformation Δp pour la mesure du gradient. La déviation verticale d'une échelle graduée, placée en amont d'une cuve à diffusion a été utilisée par Münter en 1931 pour l'étude des lois de la diffusion [9].

En nous limitant au cas de l'incidence nulle ($\bar{\delta} = 0$), nous avons pu contrôler expérimentalement les formules donnant cette déviation.

D) INFLUENCE DE L'ANGLE D'INCIDENCE $\bar{\delta}$. — Nous considérons seulement ici le cas où l'angle $\bar{\delta}$ est petit. Nous pouvons faire un développement en série par rapport à $\bar{\delta}$ des formules (23) à (27). En nous limitant aux premiers termes, on trouve

$$(33) \quad \overline{\Delta n} = -\frac{a^2 \bar{n}'^2}{6m} (3r - 2) + \frac{\bar{\delta}^2}{2m} \left[(\bar{n} - m)^2 - \frac{a^2 \bar{n}'^2}{6} (9r - 5) \right],$$

$$(34) \quad \overline{\Delta y} = -\frac{a^2 \bar{n}'}{3m} \left(3r - 2 - \frac{\bar{n} - m}{m} \right) + \frac{a \bar{\delta}}{2m} \left[\bar{n} - m - \frac{(\bar{n} - m)^2}{m} + \frac{a^2 \bar{n}''}{12} - \frac{a^2 \bar{n}'^2}{4m} (22r - 17) \right] - \frac{\bar{\delta}^2 a^2 \bar{n}'}{12m} \left(24r - 17 - 17 \frac{\bar{n} - m}{m} \right),$$

$$(35) \quad \Delta p = \frac{(1-p) a^2 \bar{n}'}{2m} \left[p - 1 - \frac{\bar{n} - m}{m} (p + 1) \right] + \frac{(1-p) a \bar{\delta}}{m} \left[-(\bar{n} - m) + \frac{(\bar{n} - m)^2}{m} + \frac{a^2 \bar{n}''}{12} (2p^2 - p - 1) + \frac{a^2 \bar{n}'^2}{6m} (3r + p^2 + 4p - 12) \right] + \frac{(1-p) a^2 \bar{n}' \bar{\delta}^2}{2m} \left[p - 2 - \frac{\bar{n} - m}{m} (2p + 5) \right] \text{ si } 0 < p < 1,$$

$$(36) \quad \Delta p = \frac{a^2 \bar{n}'}{2m} \left(2p - 1 - \frac{\bar{n} - m}{m} \right) + \frac{a \bar{\delta}}{m} \left[-(\bar{n} - m) + \frac{(\bar{n} - m)^2}{m} - \frac{a^2 \bar{n}''}{12} + \frac{a^2 \bar{n}'^2}{2m} (r + 5p - 4) \right] + \frac{a^2 \bar{n}' \bar{\delta}^2}{m} \left[2p - 1 - \frac{5}{2} \frac{\bar{n} - m}{m} \right] \text{ si } p < 0,$$

$$(37) \quad \overline{\Delta n'} = -\frac{a^2 \bar{n}'' \bar{n}'}{3m} (3r - 2) + \frac{\bar{n}' \bar{\delta}^2}{m} \left[\bar{n} - m - \frac{a^2 \bar{n}''}{6} (9r - 5) \right].$$

On voit que l'angle $\bar{\delta}$ n'intervient qu'au deuxième ordre sur $\overline{\Delta n}$ et $\overline{\Delta n'}$. Pour que

cet angle ne modifie pas de façon sensible les erreurs $\overline{\Delta n}$ et $\overline{\Delta n'}$ il suffit que $\overline{\delta^2}$ soit négligeable devant 1.

Un angle $\overline{\delta}$ de 2° soit 0,035 rd est encore acceptable. Cette tolérance est nettement supérieure à celle qu'on réalise au cours des réglages.

Pour les erreurs $\overline{\Delta y}$ et $\overline{\Delta p}$, on peut négliger les termes en $\overline{\delta^2}$, il suffit que $\overline{\delta}$ soit inférieur à 2° .

Les termes en $(\overline{n} - m) \overline{\delta}$ et $(\overline{n} - m)^2 \overline{\delta}$ sont généralement négligeables dans les milieux gazeux, car $\overline{n} - m$ reste toujours très petit, pratiquement négligeable devant $\overline{n'}$ et $\overline{n''}$, du fait de la loi de Gladstone.

Dans les milieux liquides, ces termes peuvent parfois diminuer la tolérance sur $\overline{\delta}$. Le calcul doit être fait pour chaque cas particulier. Les termes en $\overline{n'^2} \overline{\delta}$ et $\overline{n''} \overline{\delta}$ peuvent aussi diminuer la tolérance sur $\overline{\delta}$. On doit parfois en tenir compte.

Dans les expériences que nous avons faites, le réglage de l'angle $\overline{\delta}$ était réalisé à mieux que $20'$; on pouvait donc négliger tous les termes en $\overline{\delta}$ et $\overline{\delta^2}$ et appliquer les formules simplifiées (28) à (32).

3. Description du montage. Erreurs autres que la réfraction. — 1. Principe. —

Nous avons utilisé, pour cette étude, des milieux liquides, parce que par rapport aux milieux gazeux des veines de soufflerie, les gradients d'indice obtenus dans les liquides restent considérablement plus stables dans le temps, ont une répartition plus simple et sont plus faciles à réaliser.

Si on superpose, dans une cuve, deux liquides d'indices différents, ces deux liquides diffusent l'un dans l'autre et il s'établit deux sortes de gradients :

1^o des gradients provoqués directement par la diffusion dn/dy qui correspondent en général aux gradients de vitesse dans le sens de l'écoulement. Toutes les valeurs peuvent être obtenues, depuis les plus faibles correspondant à des couches diffusantes larges, jusqu'aux plus élevées obtenues en début d'expérience ;

2^o des gradients dn/dx et dn/dz correspondant aux effets de parois et sur lesquels on ne peut pas agir.

On étudie les gradients dn/dy dans les conditions où les effets de parois sont négligeables. On peut produire des gradients de même ordre en introduisant un cristal dans une cuve pleine de solvant.

Un interférogamme de la cuve donne $n(y)$ dans toute la zone de la cuve où les parois n'ont pas d'effet sensible et si l'épaisseur traversée est suffisamment petite pour que les erreurs de réfraction soient négligées, d'où $n' = dn/dy$. Soit (fig. 9) Oz l'axe de l'interféromètre utilisé. Sur une épaisseur de cuve plus grande, obtenue dans la direction Ox, on peut mesurer :

d'une part la déviation β et le déplacement vertical $y_0 - y_a$ grâce à un montage strioscopique d'axe Ox ;

d'autre part, le chemin optique grâce à un interféromètre d'axe Ox.

En fait on construit un seul interféromètre et on fait tourner la cuve d'un quart de tour pour substituer l'axe Ox à l'axe Oz.

La figure 10 donne le schéma général de l'appareil vu en plan ; les deux cuves A et B sont placées sur un plateau tournant T.

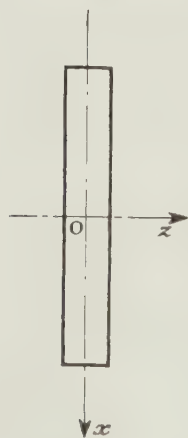


FIG. 9.

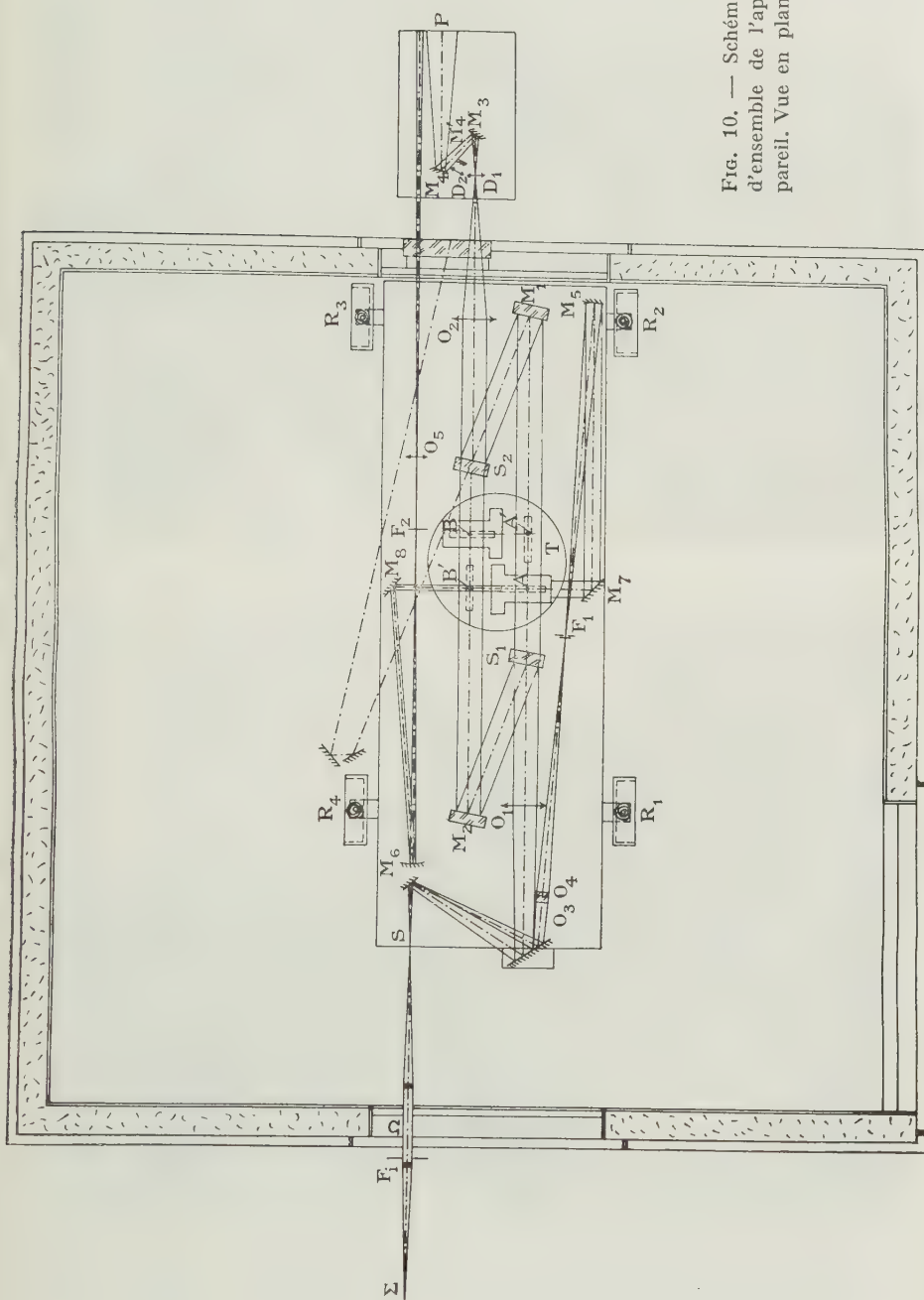


FIG. 10. — Schéma d'ensemble de l'appareil. Vue en plan.

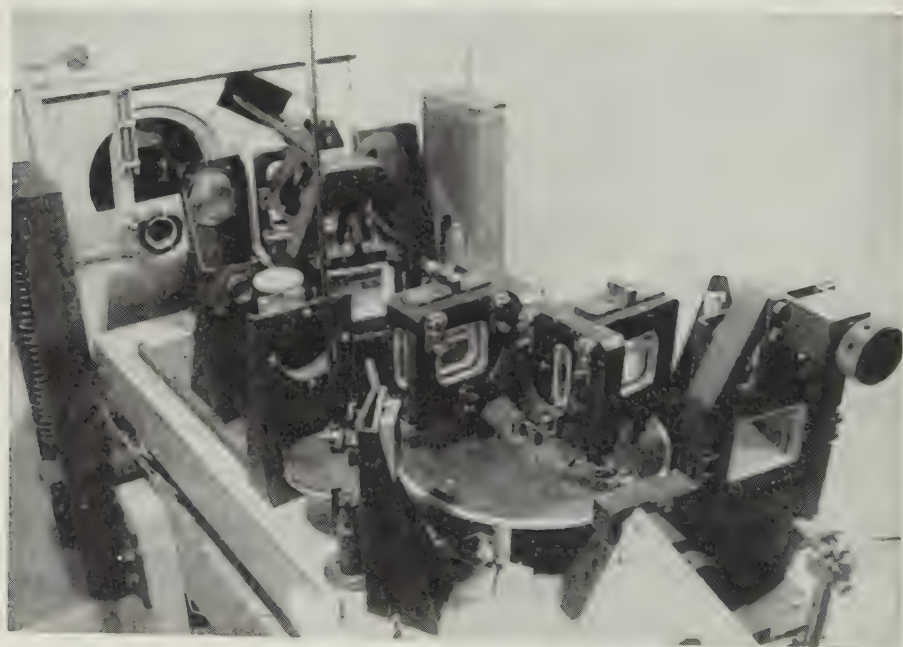
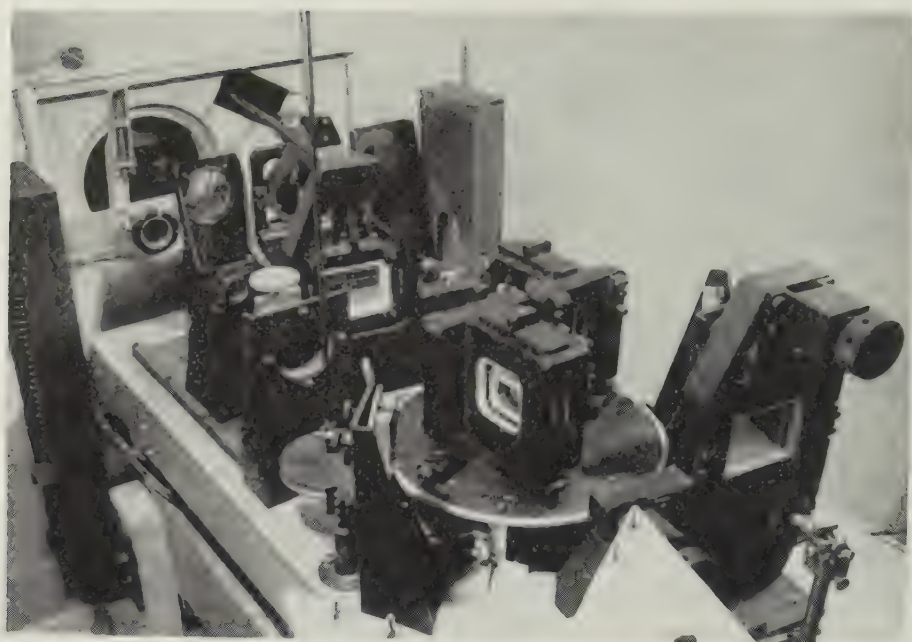


FIG. 11. — Cuves à expériences : en haut, la grande épaisseur Ox de la cuve est sur l'axe de l'interféromètre, la faible épaisseur Oz est sur l'axe de l'appareil de strioscopie ; en bas, la faible épaisseur Oz de la cuve est sur l'axe de l'interféromètre.

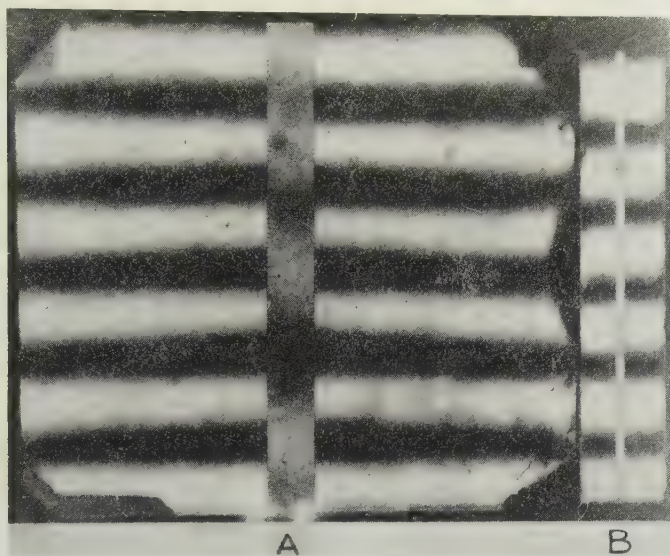


FIG. 12. — Défauts résiduels de l'interféromètre :
A) $a = 10$ mm ; B) $a = 100$ mm.

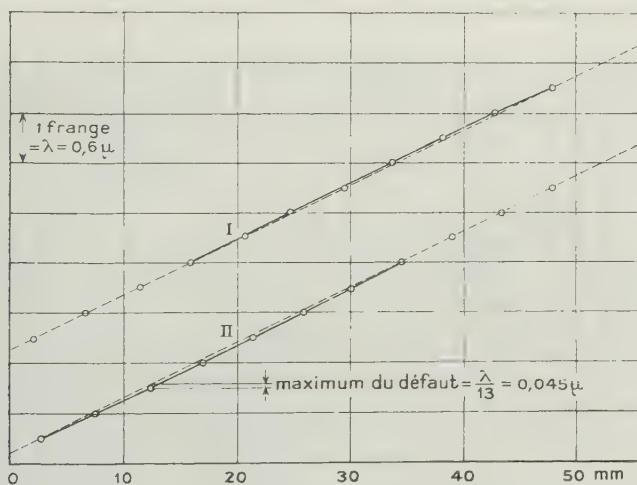


FIG. 13. — Défauts résiduels de l'interféromètre (dépouillement des interférogrammes de la fig. 12) : I, petit champ ou grande épaisseur de cuve ; II, grand champ ou faible épaisseur de cuve.

La diffusion est produite dans la cuve A qui occupe successivement les deux positions A et A' sur le trajet S_1M_1 de l'interféromètre. La cuve B peut occuper les deux positions B, B' sur le trajet de référence M_2S_2 . L'interféromètre est du type Mach-Zehnder horizontal. S_1 et S_2 sont les séparatrices, M_1 et M_2 les miroirs, O_1 le collimateur et O_2 l'objectif collecteur ; les objectifs de mise au point D_1 et D_2



(a)



(b)

FIG. 14 — Ensemble récepteur : a) en cours de réglage ; b) en cours d'expérience.

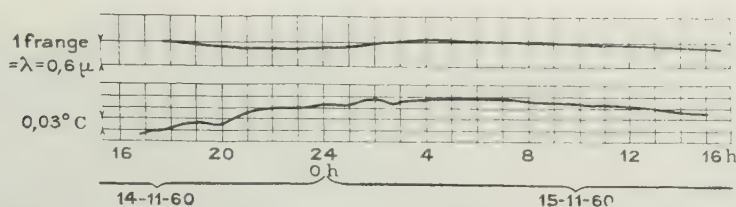


FIG. 15. — Dérive des franges (courbe du haut) comparée aux variations de la température (courbe du bas).

sont utilisés alternativement pour faire la mise au point sur la position A ou A' de la cuve. Les trois miroirs auxiliaires M_3 , M_4 et M_4' ont seulement pour rôle de réduire l'encombrement.

L'appareil de strioscopie est un appareil en Z ; les couteaux ou biprismes F_1 et F_2 sont au foyer des deux miroirs concaves M_5 et M_6 . M_6 joue le rôle d'objectif collecteur. Les deux miroirs M_7 et M_8 envoient le faisceau de strioscopie sur la cuve A. L'éclairement du couteau-objet F_1 est obtenu par les deux objectifs identiques O_3 et O_4 . L'objectif de mise au point est désigné par O_5 .

La source S et la plaque photographique P sont communes aux deux appareils. Un collimateur Ω éclaire la source S. Un filtre interférentiel F_i placé sur ce collimateur permet de sélectionner la longueur d'onde λ utilisée. La lampe Σ est une lampe à vapeur de mercure HBO. On choisit $\lambda = 4\,358 \text{ \AA}$.

La figure 11 montre le plateau tournant et les cuves dans leurs deux positions.

Les quatre pièces interférométriques M_1 , M_2 , S_1 et S_2 ont été réalisées en silice. La qualité optique obtenue peut être considérée comme parfaite. Les figures 12 et 13 montrent les défauts résiduels de l'interféromètre. Elles superposent les défauts des quatre pièces interférométriques et ceux des hublots des cuves à diffusion. On voit que le défaut n'atteint même pas une valeur de $\lambda/13$ soit $0,045 \mu$.

2. Difficultés dues à la température. — Nous avons vu, en introduction, l'importance d'un bon isolement thermique de l'interféromètre. Le problème est spécialement ardu ici du fait que nous utilisons des liquides.

Tout l'appareil est placé dans une enceinte dont la paroi est constituée de deux panneaux de bois séparés par 5 cm de laine de verre.

Les sources thermiques inévitables sont : les sources lumineuses, le moteur entraînant la rotation à distance des cuves et les observateurs. Ces sources sont soigneusement placées à l'extérieur de l'enceinte. Les commandes de réglage de l'interféromètre ont été rendues amovibles, de sorte que leurs orifices de passage peuvent être obturés au moment des expériences.

Les hublots d'entrée et de sortie de la lumière sont épais de plusieurs centimètres pour que l'isolement soit conservé.

La figure 14 montre l'ensemble de la chambre photographique, d'abord en cours de réglage, ensuite en cours d'expérience.

A l'extérieur de l'enceinte, on réalise une atmosphère à température constante au moyen de deux radiateurs couplés séparément avec deux thermostats à $0,1^\circ \text{C}$, par l'intermédiaire de deux relais à mercure. Le brassage de l'air est obtenu par deux ventilateurs fonctionnant en permanence.

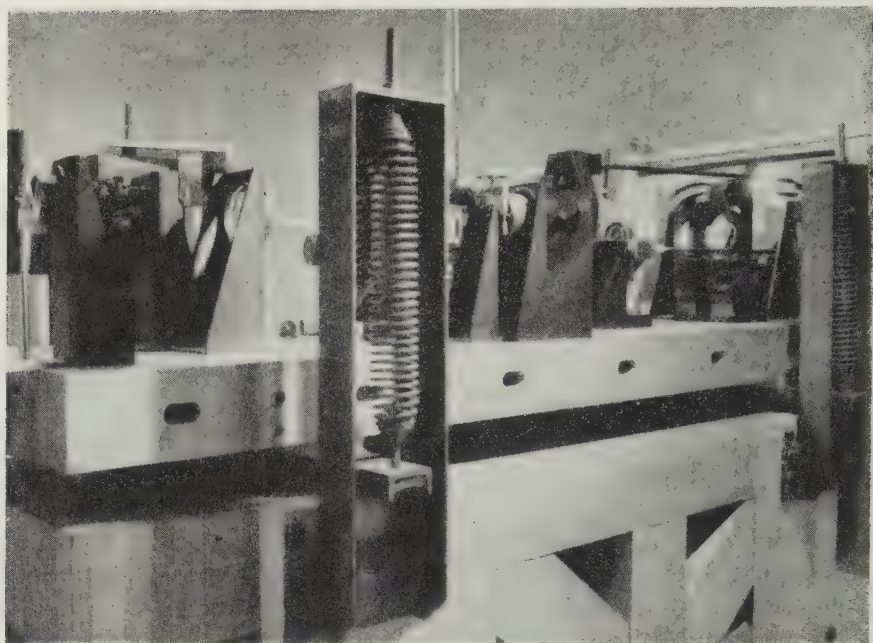


FIG. 16. — Suspension antivibratoire de l'appareil : lames-ressorts, vis de réglage et tiges de commande des séparatrices et miroirs.

Les variations de la température par absorption de chaleur rayonnée sont limitées au moyen d'une couche de peinture d'aluminium sur toute la paroi extérieure de l'enceinte.

L'équilibre de température est atteint en 2 ou 3 j. Il se maintient à l'extérieur de l'enceinte à 0,2 ou 0,3° près, tandis qu'à l'intérieur on réalise mieux que 0,03° pendant des périodes de 12 h consécutives.

La principale cause de perturbation est la variation brutale de la température extérieure, entre le jour et la nuit par exemple. Cela produit un échauffement ou un refroidissement des murs du laboratoire qui rayonnent alors sur l'enceinte. La mesure de la température se fait au voisinage des cuves au moyen d'un fil de platine de diamètre 25 μ et de longueur environ 40 cm. Les variations de résistance de ce fil sont mesurées au moyen d'un pont de Wheatstone au voisinage de l'équilibre. Les déviations du spot du galvanomètre sont enregistrées.

La figure 15 montre le résultat d'un tel enregistrement et, en parallèle, on voit la déformation des franges d'interférences.

3. Difficultés mécaniques. — A) SUSPENSION DE L'INTERFÉROMÈTRE. — L'enceinte calorifuge qui entoure l'interféromètre est évidemment une excellente protection contre les courants d'air. Elle limite de façon suffisante les flexions et contractions d'origine thermique de l'appareil.

Il reste les vibrations. Nous avons d'abord essayé d'alourdir l'appareil en le fixant sur une table en chêne qui pesait environ 200 kg ; puis nous l'avons posé

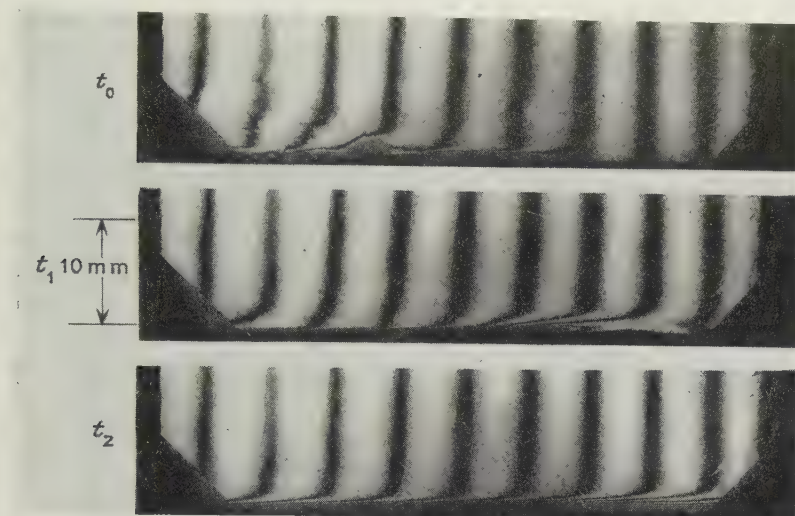


FIG. 17. — Mise en route d'une diffusion. Courants de convection ($\alpha = 100$ mm).

sur deux plaques d'acier de 2 cm d'épaisseur séparées par une feuille de caoutchouc mousse épais. L'appareil lui-même pèse 135 kg. Au total on atteignait environ 650 kg.

Cette précaution s'est révélée insuffisante ; l'appareil, situé au septième étage, restait sensible à des vibrations de période courte, pratiquement visibles en permanence.

L'interposition, entre l'interféromètre et son support, de coussins d'air, sous forme de balles de tennis logées entre deux planches de balsa de 10 cm d'épaisseur, a donné un résultat meilleur : l'appareil vibrait encore de façon intermittente sous l'effet de perturbations extérieures (avions, camions, ...) ou intérieures (passages dans les couloirs, claquements de porte, machines-outils, ...). Nous avons dû monter une visée réflex de l'interférogramme permettant de choisir une période calme pour prendre les clichés. Cette visée utilise la deuxième sortie de l'interféromètre.

Un résultat nettement meilleur a été obtenu au moyen de ressorts calculés pour couper toute vibration de fréquence supérieure à 1 Hz.

L'appareil est suspendu à quatre ressorts identiques R_1 , R_2 , R_3 et R_4 qui travaillent en extension. Ils sont visibles sur la figure 16. On a pris la précaution de rendre la source S solidaire de l'interféromètre. Dans ces conditions, les oscillations données à l'appareil pendant les réglages sont suffisamment peu gênantes pour qu'il n'ait pas paru nécessaire de les amortir.

B) CUVES A EXPÉRIENCES (fig. 11). — La conception des cuves à expériences a posé des problèmes :

- les faces des cuves doivent être réglables à la précision interférométrique ;
- les parois intérieures doivent être planes sur toute leur longueur pour simplifier la forme des effets de parois, cela exige un affleurement parfait des hublots sur leur monture ;

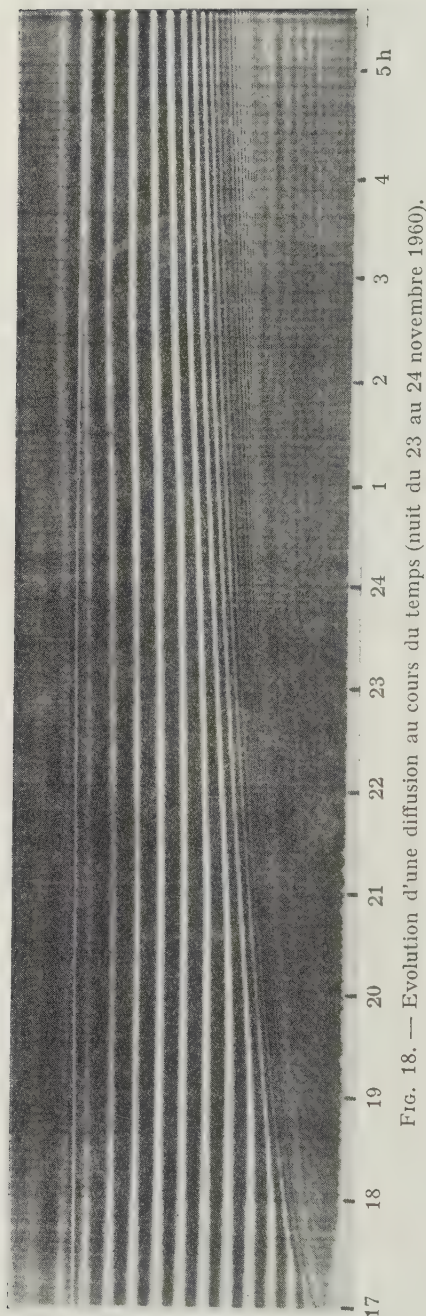


Fig. 18. — Evolution d'une diffusion au cours du temps (nuit du 23 au 24 novembre 1960).

le fond de la cuve et au moins deux parois latérales doivent être visibles pour que l'on puisse juger de l'importance des effets de paroi et s'en affranchir ;

l'étanchéité doit être respectée.

La solution réalisée comporte deux hublots perpendiculaires fixes. La perpendicularité, obtenue par construction, est suffisante pour nos expériences. L'étanchéité des deux hublots réglables est assurée par des joints toriques en caoutchouc. Le réglage se fait au moyen de vis qui compriment plus ou moins ces joints.

Les hublots ont été réalisés en verre, avec une planéité supérieure au quinzième de frange et appariés en épaisseur à mieux qu'une demi-frange soit $0,3 \mu$.

Ces hublots ont été scellés dans leur monture. Plusieurs essais de scellement ont été réalisés ; le scellement à la cire d'abeilles a donné satisfaction dans notre cas.

Le champ de l'interféromètre est limité par les cuves soit :

60×10 mm dans le cas de la grande épaisseur $a = 100$ mm,

60×60 mm dans le cas de la faible épaisseur $a = 10$ mm.

Un moteur inverseur fait tourner le plateau-support de cuves T à la vitesse de 2 tr/h. Des butées réglables placées sous le plateau l'arrêtent automatiquement dans la position voulue et coupent en même temps l'alimentation du moteur.

La commande de la rotation des cuves se fait à distance depuis la chambre photographique. Cette commande échange les optiques de mise au point correspondant l'une à la position A, l'autre à la position A' de la cuve à diffusion. Un voyant lumineux indique si le plateau est immobile ou non.

C) RÉGLAGE DE L'INTERFÉROMÈTRE. —

Les séparatrices et les miroirs sont montés sur des lames-ressorts. Les réglages fins sont faits par vis à écrous régulés, manœuvrées à l'aide de tiges amovibles. Ces pièces sont visibles sur la figure 16.

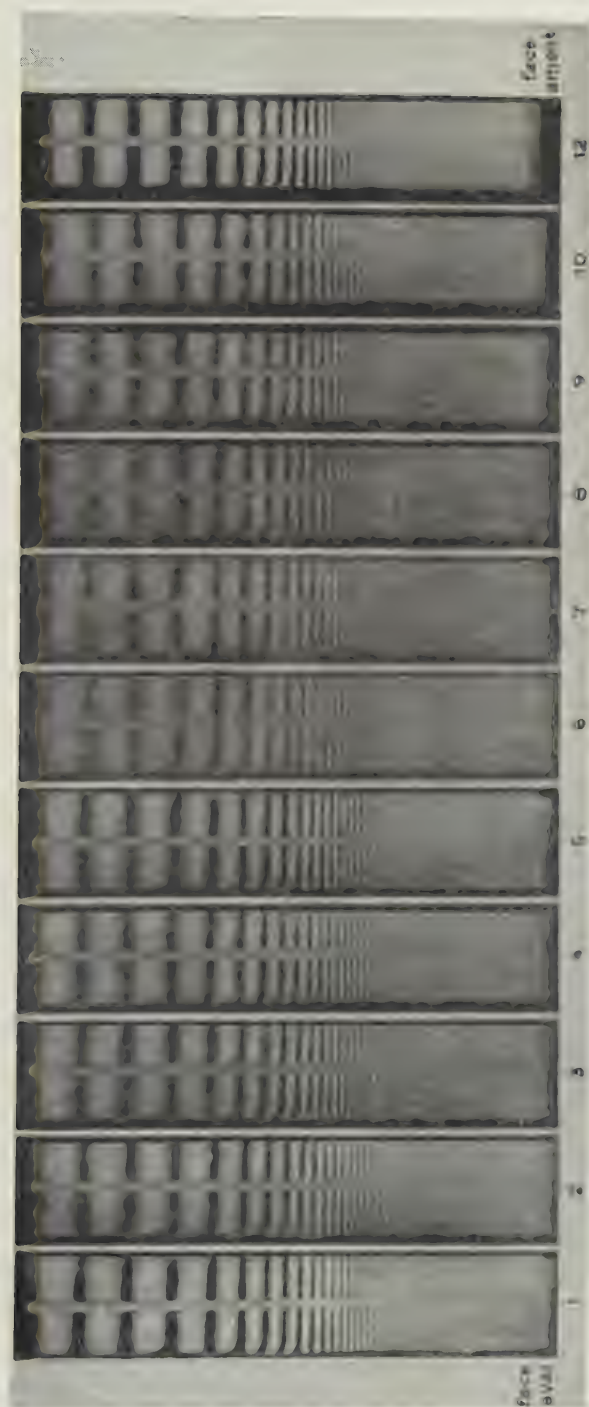


Fig. 19. — Influence de la position du plan de mise au point sur les interférogammes ($a = 100$ mm).

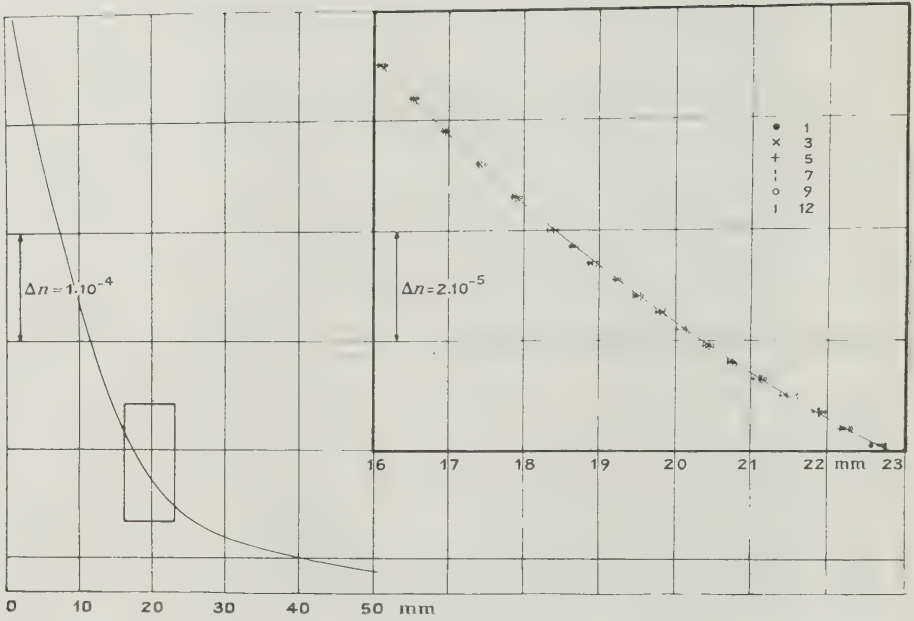


FIG. 20. — Influence de la position du plan de mise au point sur les interférogammes (dépouillement des clichés de la fig. 19).

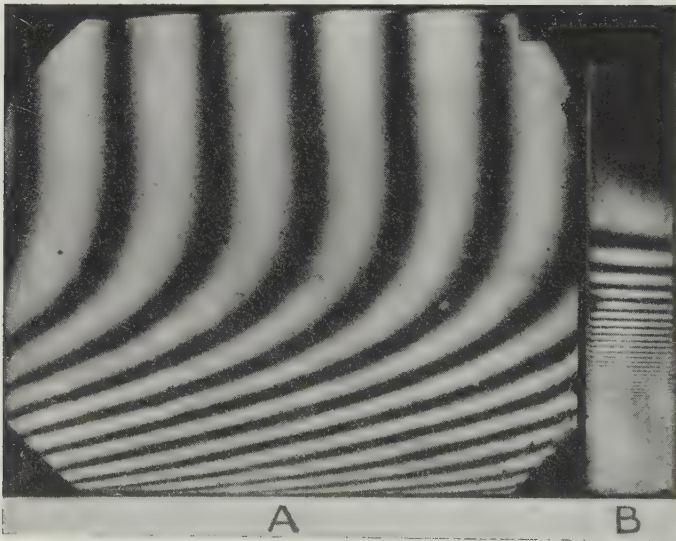


FIG. 21. — Interférogammes d'une diffusion (état initial en franges verticales ou en teinte plate) : A) $a = 10$ mm ; B) $a = 100$ mm.

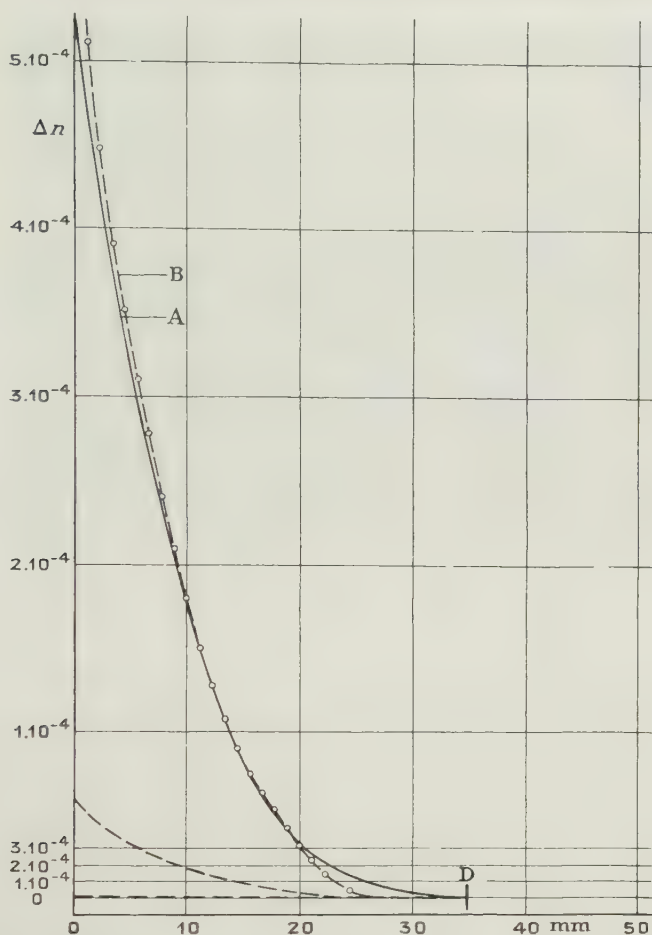


Fig. 22. — Dépouillement des interférogrammes de la figure 21 : courbe A, faible épaisseur de cuve ; courbe B, grande épaisseur ; D, début de la diffusion.

4. Expériences de diffusion. — Les cuves étant remplies d'eau, on doit régler l'égalité des épaisseurs et le parallélisme dans les deux directions Ox et Oz . L'égalité des épaisseurs peut être obtenue à mieux que $1/3$ de frange, soit $0,2 \mu$ sur une épaisseur de 10 cm. Le parallélisme est vérifié à $0,5''$ près au moyen d'une lunette autocollimatrice.

On laisse le système s'équilibrer en température, puis on introduit un cristal d'hyposulfite de sodium d'environ 30 à 50 mg dans l'une des cuves, la seconde cuve servant de référence. Le volume intérieur d'une cuve est d'environ 70 cm^3 . Dans ces conditions, le cristal se dissout très rapidement et des couches horizontales d'indice homogène s'établissent en moins de 0,5 h.

La figure 17 montre les perturbations provoquées par la chute du cristal, sa dissolution et le refroidissement qu'il provoque dans l'eau. Les trois clichés ont été pris à quelques minutes d'intervalle.

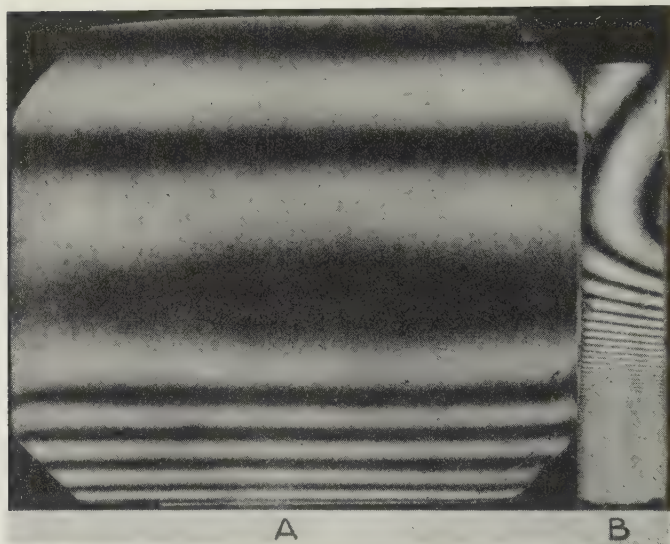


FIG. 23. — Interférogrammes d'une diffusion (le réglage initial est choisi de façon à diminuer le nombre de franges) : A) $a = 10$ mm ; B) $a = 100$ mm.

La figure 18 montre l'évolution de la diffusion au cours du temps. C'est un enregistrement des franges d'interférences le long d'une verticale.

Pendant plus de 24 h, on a donc dans la cuve un milieu à gradient d'indice vertical. Ce gradient varie lentement et après 12 h on peut considérer l'état de la cuve comme stable sur une durée de plus de 0,5 h.

Dans ces conditions, le gradient d'indice n' varie de $3 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$ environ jusqu'à 0.

Pour étudier la déformation des objets réels, nous avons obtenu des gradients beaucoup plus forts en versant dans l'eau une solution concentrée d'hyposulfite de sodium. On a ainsi atteint des gradients allant jusqu'à $5 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$. Il n'y a pratiquement pas de limite aux valeurs de gradients que l'on peut produire.

4. Etude expérimentale des erreurs dues à la réfraction. — 1. Erreurs sur les interférogrammes. — Le calcul théorique a montré que, pour notre appareil (ouverture image $\Phi/f = 0,031$, épaisseur de cuve $a = 10$ mm ou $a = 100$ mm), les erreurs de réfraction ne modifient pratiquement pas les interférogrammes.

A) INFLUENCE DE LA MISE AU POINT. — Dans la grande épaisseur, $a = 100$ mm, on a pris plusieurs clichés en faisant varier la mise au point depuis la face amont de la cuve jusqu'à sa face aval. Les clichés ont été pris à 1 ou 2 mn d'intervalle (fig. 19).

Le changement de mise au point modifie le grandissement. On le mesure grâce à un micromètre placé au milieu de la cuve.

Du premier au dernier cliché, la variation du grandissement est de 6 %. On fait le dépouillement en pointant la position de chaque frange le long d'une droite verticale parallèle au micromètre, identique pour tous les clichés.

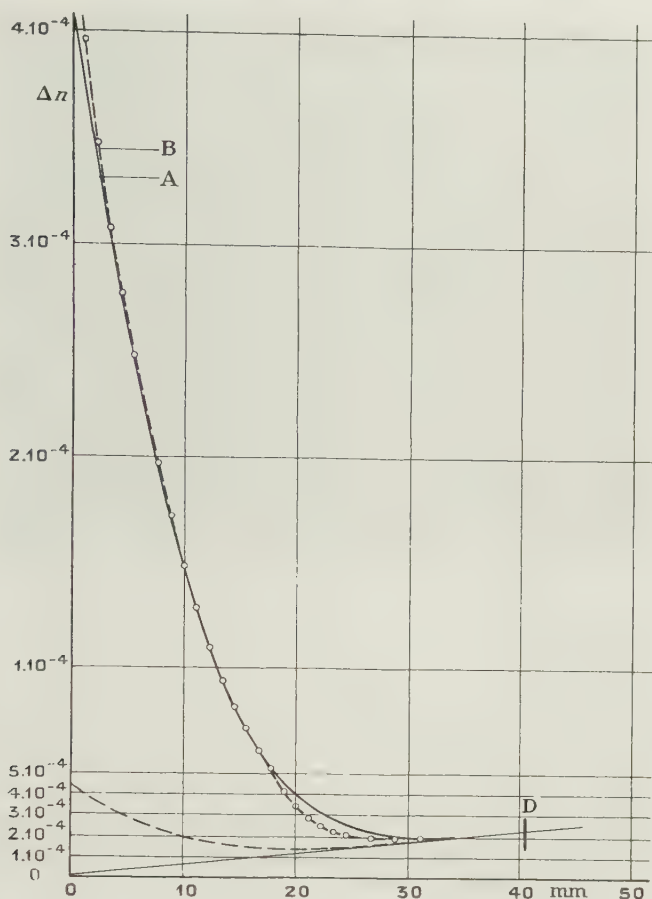


FIG. 24. — Dépouillement des interférogrammes de la figure 23 : courbe A, faible épaisseur de cuve ; courbe B, grande épaisseur de cuve ; D, début de la diffusion.

On ramène tous les résultats au même grandissement et on construit la courbe $\bar{n} = f(y)$. L'échelle des valeurs de $\bar{n}$ est obtenue par l'équation $a \, dn = \lambda$, où dn représente la variation de l'indice pour un interfrange.

Toutes les courbes $\bar{n} = f(y)$ obtenues ainsi sont confondues à la précision des dépouillements. La figure 20 montre, d'une part, la courbe $\bar{n} = f(y)$ pour un interférogramme complet et, d'autre part, un très fort agrandissement d'une partie de cette courbe. On peut voir sur cet agrandissement avec quelle précision toutes les courbes sont confondues.

Plusieurs expériences de ce type nous permettent d'affirmer que la variation du plan de mise au point ne modifie pratiquement pas les interférogrammes.

B) INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE CUVE. — Il s'agit ici de comparer des interférogrammes correspondant au même état de diffusion dans la cuve d'expérience mais à des épaisseurs variables de celle-ci.

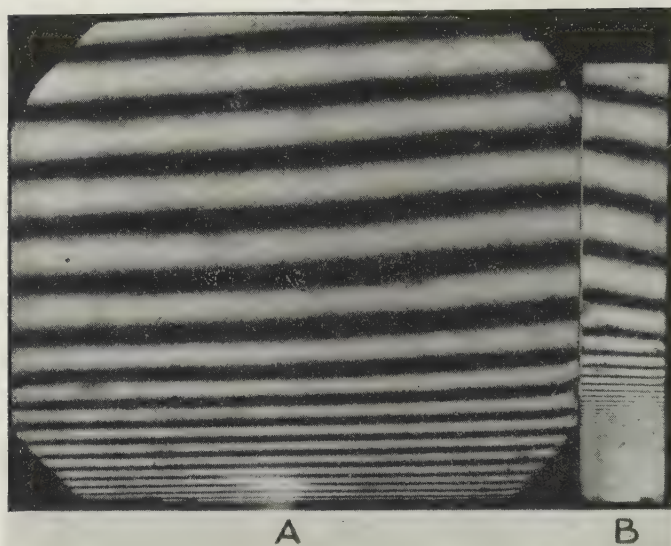


FIG. 25. — Interférogrammes d'une diffusion (le réglage initial est choisi de façon à augmenter le nombre de franges) : A) $a = 10$ mm ; B) $a = 100$ mm.

On fait d'abord un cliché pour l'épaisseur $a = 10$ mm de la cuve (cliché A) puis on fait tourner le plateau T pour amener la deuxième dimension de la cuve ($a = 100$ mm) dans le champ de l'interféromètre et on prend un second cliché (cliché B).

La rotation des cuves demande 7 mn. Plusieurs expériences ont prouvé que cet intervalle de temps était suffisamment court pour que l'état de la diffusion ne soit pas modifié et que, cependant, la rotation était suffisamment lente et sans à-coups pour ne pas perturber la diffusion.

Les figures 21, 23, 25 et 27 montrent quatre résultats expérimentaux. Les figures 22, 24, 26 et 28 sont les dépouillements de ces résultats.

On a construit sur un même diagramme :

1° la courbe des positions des franges pour l'interférogramme A ;

2° la courbe des positions des franges pour l'interférogramme B.

Une correction a été faite pour ramener les grandissements des deux clichés à la même valeur.

Tant que l'indice de réfraction reste homogène, les deux courbes sont confondues en une droite. Lorsque la diffusion commence à perturber l'indice $\bar{n}$, les courbes s'éloignent de la droite.

La différence entre les ordonnées de la courbe et celles de la droite de référence est proportionnelle aux variations dn de l'indice et à l'épaisseur a de la cuve ; elle est donc dix fois plus forte pour le cliché B que pour le cliché A. Le rapport des épaisseurs est 10, mais l'indice est le même. On multiplie donc par 10 les écarts obtenus sur la courbe faible épaisseur (cliché A) et on obtient une troisième courbe qui, à la précision des mesures près, est confondue avec la courbe

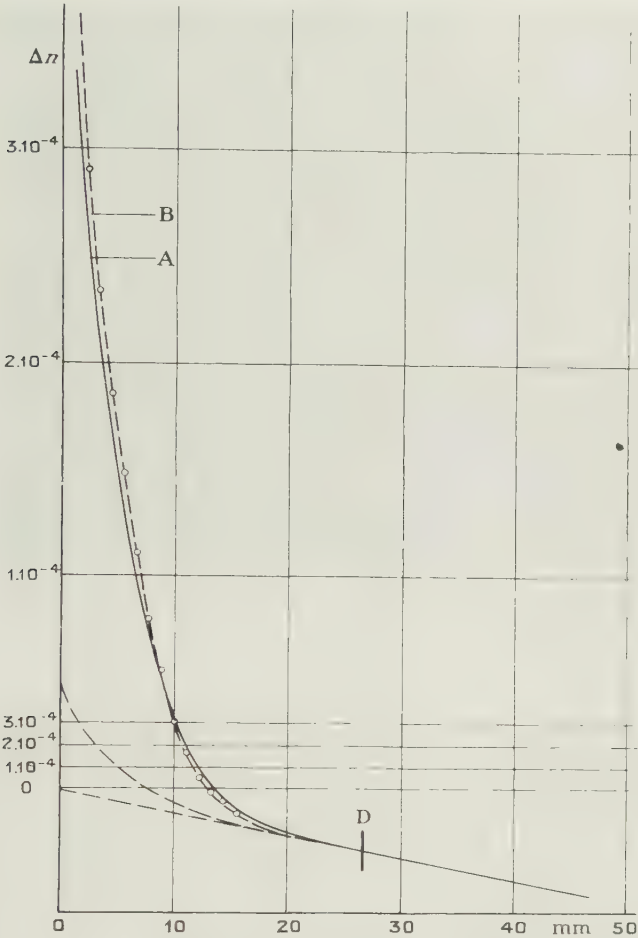


FIG. 26. — Dépouillement des interférogrammes de la figure 25 : courbe A, faible épaisseur de cuve ; courbe B, grande épaisseur de cuve ; D, début de la diffusion.

grande épaisseur. Cette vérification est faite à mieux que 15 % dans toutes les expériences.

C) RÔLE DU RÉGLAGE DE L'ÉTAT INITIAL. — Les clichés présentés ci-dessus correspondent aux trois possibilités de réglage de l'interféromètre :

teinte plate ou franges de l'état initial parallèles à la direction du gradient (fig. 24) ;

franges perpendiculaires à la direction du gradient, le réglage est fait de manière à diminuer le nombre de franges de l'interférogramme (fig. 23) ;

le réglage est fait de manière à augmenter le nombre de franges de l'interférogramme (fig. 25 et 27).

Il est bien évident que si les franges sont très serrées (gradient élevé ou épaisseur forte) le réglage correspondant à la figure 23 facilite le dépouillement. Si, au con-

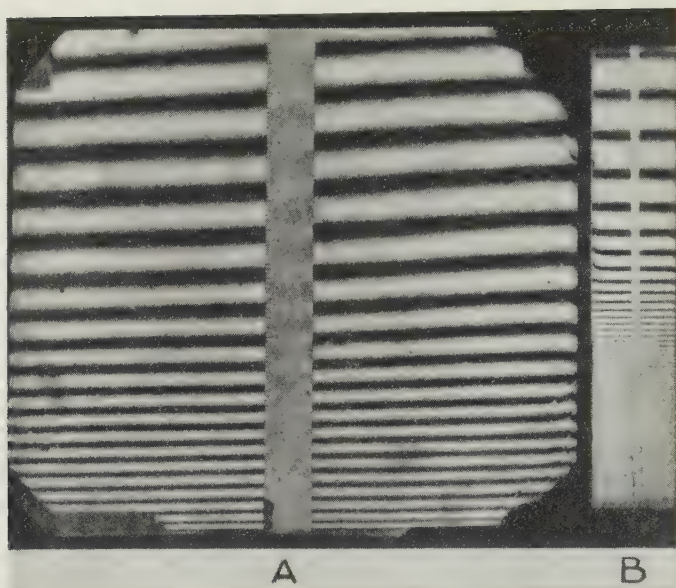


FIG. 27. — Interférogrammes d'une diffusion : A) $a = 10$ mm ; B) $a = 100$ mm.

traire, l'interfrange est très grand (gradient faible ou faible épaisseur) le réglage correspondant aux figures 25 et 27 augmente le nombre des pointés donc la précision des dépouillements.

Les courbes de dépouillement montrent que l'interférogramme A est à peu près 10 fois moins précis que l'interférogramme B. Pour la comparaison des deux, on a donc intérêt à choisir le réglage des figures 25 et 27 pour améliorer la précision.

2. Déformation du profil. — Nous utilisons comme objet un micromètre gradué en demi-millimètres, placé parallèlement au gradient.

L'interféromètre nous permet d'avoir un objet non déformé en permanence dans le champ. Il suffit, en effet, de placer un deuxième micromètre sur le deuxième trajet de l'interféromètre pour avoir une référence.

On place le micromètre à étudier en amont de la cuve à diffusion, à une distance variable de celle-ci. On place le micromètre de référence sur le deuxième trajet de l'interféromètre et, en l'absence de diffusion, on conjugue rigoureusement les images des deux micromètres.

La figure 29A montre ce réglage.

On introduit alors une diffusion dans la cuve A. Le micromètre étudié se décale verticalement par rapport à la référence. On mesure cette déformation pour une épaisseur de cuve $a = 100$ mm (fig. 29C).

L'épaisseur $a = 10$ mm donne une déformation 100 fois plus faible puisque Δp est proportionnel à a^2 . On ne peut pas mesurer avec précision cette déformation mais la figure 29B est un interférogramme qui permet de construire la courbe $n = f(y)$ et d'en déduire la valeur du gradient n' .

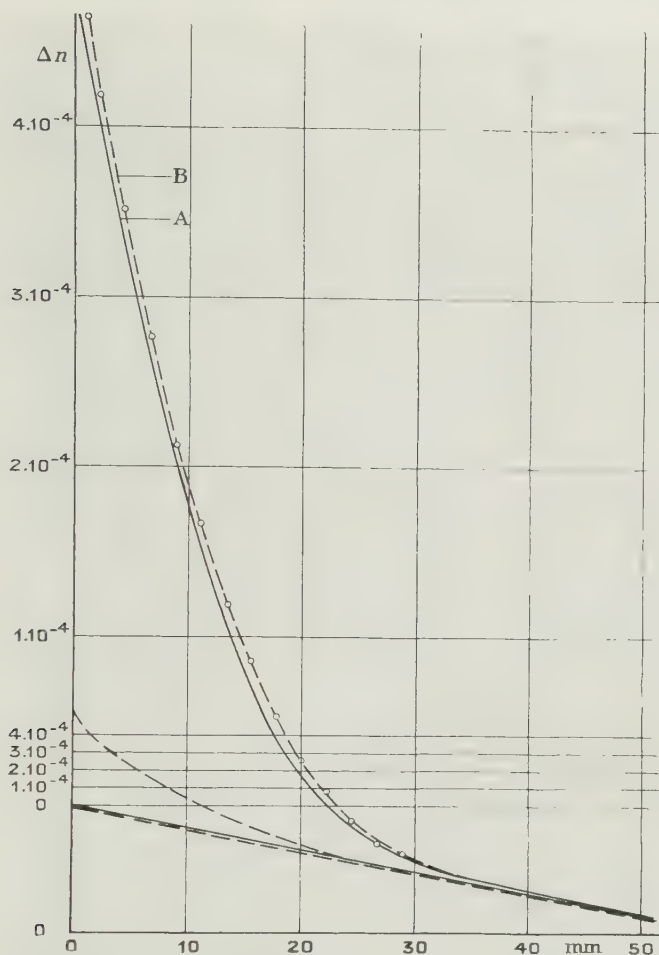


FIG. 28. — Dépouillement des interférogrammes de la figure 27 : courbe A, faible épaisseur de cuve ; courbe B, grande épaisseur de cuve.

On calcule alors Δp par la formule (31) et on compare la valeur calculée à la valeur mesurée sur la figure 26C.

Les figures 30 à 32 montrent la coïncidence entre les deux valeurs. La différence est entièrement explicable par la précision des mesures. Les figures 31 et 32 correspondent à un plan de micromètre $p = -1,48$. La figure 30 correspond à un plan de micromètre $p = -0,1$.

5. Conclusion. — 1. *Erreurs dues à la réfraction.* — A) RAPPEL DES CONDITIONS DE VALIDITÉ DE L'ÉTUDE THÉORIQUE. — La méthode de calcul utilisée ici est applicable à un milieu bidimensionnel, tant que l'indice de réfraction varie de façon continue.

Cela n'est certainement pas le cas dans une onde de choc, mais jusqu'à quelle

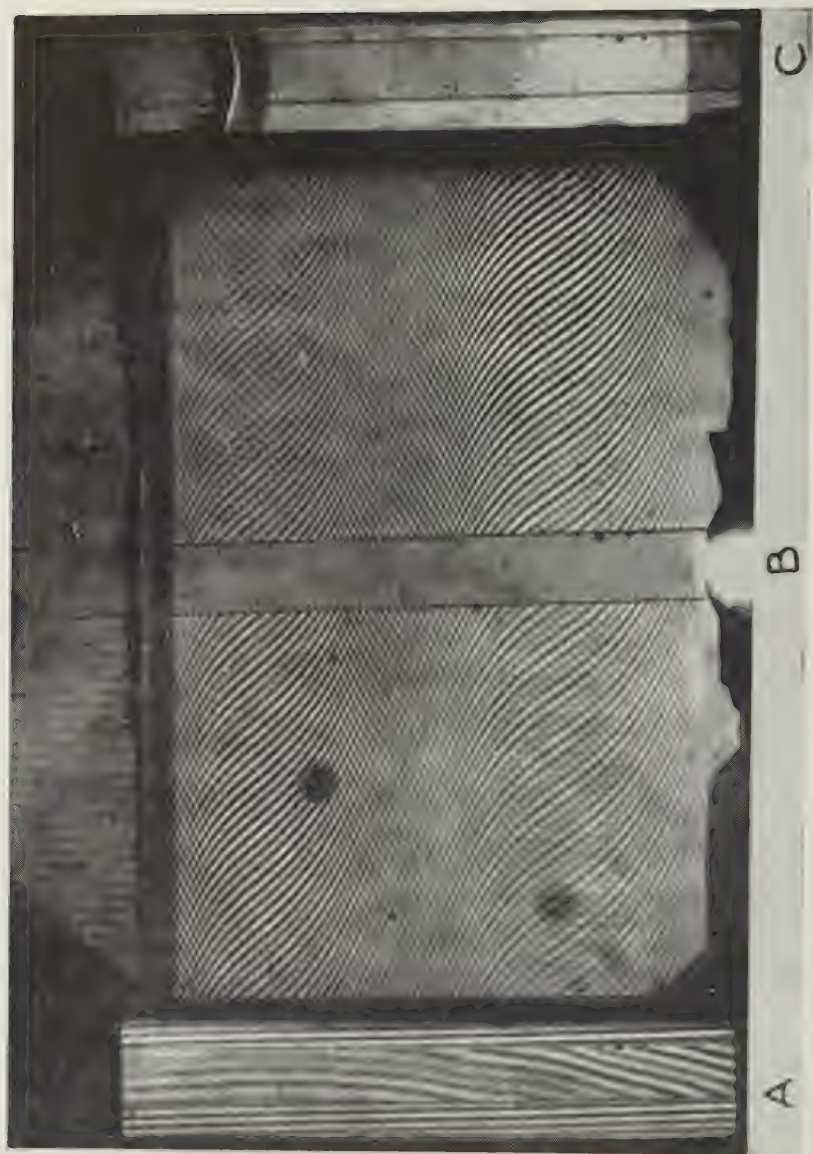


FIG. 29. — Etude de la déformation d'un objet réel en fonction du gradient d'indice : A) réglage initial de l'objet (un micromètre gradué en demi-millimètres) ; B) interférogramme pour la mesure du gradient d'indice ($a = 10$ mm) ; C) déformation du micromètre par rapport à sa référence ($a = 100$ mm),

proximité de cette onde de choc les résultats obtenus par le calcul restent-ils utilisables ? Leur validité est certaine, tant que l'interférogramme existe, c'est-à-dire tant qu'il y a des franges visibles.

Le calcul de la déformation des objets réels pourra peut-être, joint à des expériences en soufflerie, indiquer jusqu'où ce domaine doit être étendu. Cependant, la diffraction intervient certainement pour limiter les possibilités d'une telle méthode. D'autre part, la stabilité de la soufflerie est un facteur prépondérant de sa précision,

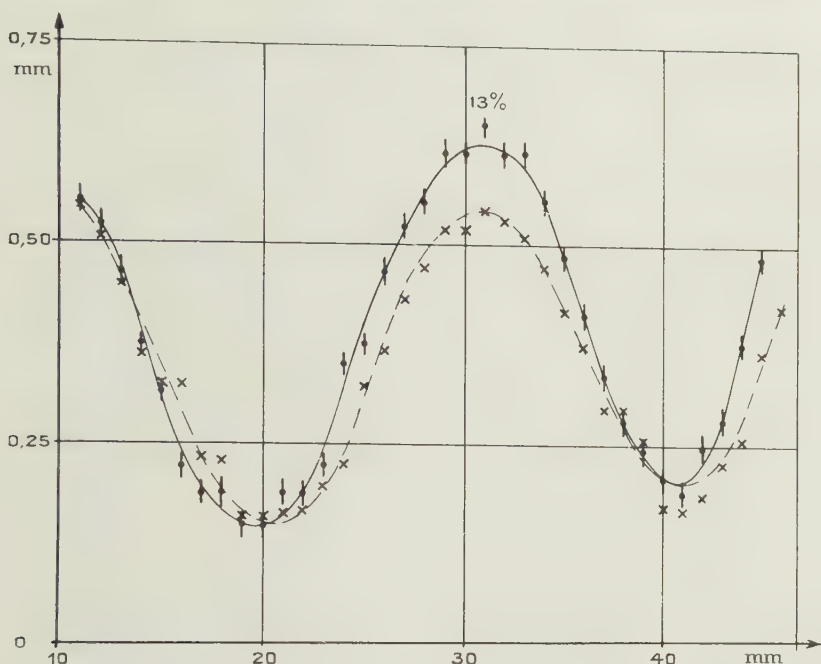


FIG. 30. — Déformation d'un objet réel ($p = -0,1$, $a = 100$ mm) (dépouillement des clichés de la fig. 29) : • mesure directe ; × calcul à partir de la mesure du gradient n' . En abscisse, graduation du micromètre ; en ordonnée, déformation du micromètre.

Dans les limites de validité ci-dessus, le calcul a été mené dans le deuxième ordre, c'est-à-dire en négligeant les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 3 de l'indice de réfraction et les termes en $(n - m)^3$, n étant l'indice dans la veine d'expérience et m l'indice de référence. On a supposé aussi que la veine était éclairée en lumière rigoureusement parallèle.

Ces approximations semblent absolument justifiées pour les expériences réalisées jusqu'ici et la méthode de calcul resterait applicable sans modification aux calculs d'ordres supérieurs.

B) RÉSULTATS THÉORIQUES. — Dans les conditions rappelées ci-dessus, les erreurs dues à la réfraction sont, le plus souvent, négligeables devant les performances des appareils de visualisation, aussi bien les interféromètres que les appareils de strioscopie interférentielle.

Les erreurs ne deviennent importantes que si le produit $|a \bar{n}'|$ devient grand, a étant l'épaisseur de la veine traversée et $\bar{n}'$ le gradient moyen de l'indice de réfraction le long du rayon lumineux. On distinguera ici deux sortes d'erreurs.

1° Erreurs qui affectent seulement les franges de l'interférogramme et du striogramme.

Dans le cas particulier où l'angle d'incidence $\bar{\delta}$ est petit ($\bar{\delta} \leq 2^\circ$) et où le terme $n - m$ est négligeable, la valeur limite de $|a \bar{n}'|$ est donnée par

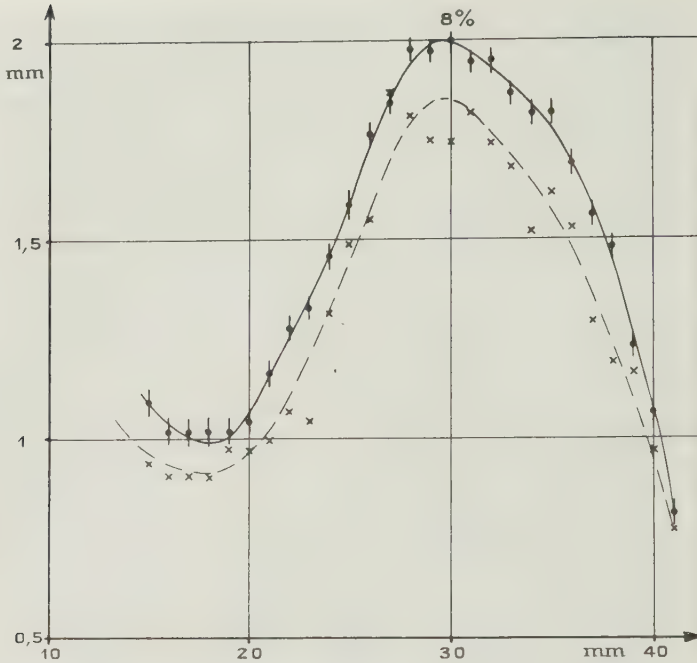


FIG. 31. — Déformation d'un objet réel ($p = -1,48$, $a = 100$ mm) :
 • mesure directe ; $\times$ calcul à partir de la mesure du gradient n' .
 En abscisse, graduation du micromètre ; en ordonnée, déformation du micromètre.

$$|a \bar{n}'| \leq \sqrt{\frac{3 \lambda m}{a |3r - 2| G}} \nu,$$

où λ est la longueur d'onde utilisée, r le coefficient caractéristique du plan de mise au point, ν le nombre d'ouverture de l'optique de sortie et G le grandissement de l'optique de sortie.

On voit donc que ces erreurs peuvent être annulées si on prend soin de faire la mise au point dans un plan situé au deuxième tiers aval de la veine.

Pour un angle d'incidence $\bar{\delta}$ supérieur à 2° ou pour une variation très forte de l'indice n par rapport à l'indice de référence m , les erreurs doivent être calculées et corrigées au moyen des formules (23), (24) et (27).

2° Erreurs qui affectent tous les objets réels placés dans la veine ou en amont de celle-ci.

Dans le cas particulier où $\bar{\delta}$ est petit ($\bar{\delta} \leq 2^\circ$) et $\bar{n} - m$ négligeable, la valeur limite du produit $|a \bar{n}'|$ est

$$|a \bar{n}'| \leq \sqrt{\frac{2 \lambda m}{a (1 - p)^2 G}} \nu,$$

p caractérisant le plan où se trouve l'objet.

Si l'erreur doit être corrigée, les formules (35) et (36) le permettent. (35) est relatif au cas de l'objet situé dans la veine et (36) au cas de l'objet situé en amont

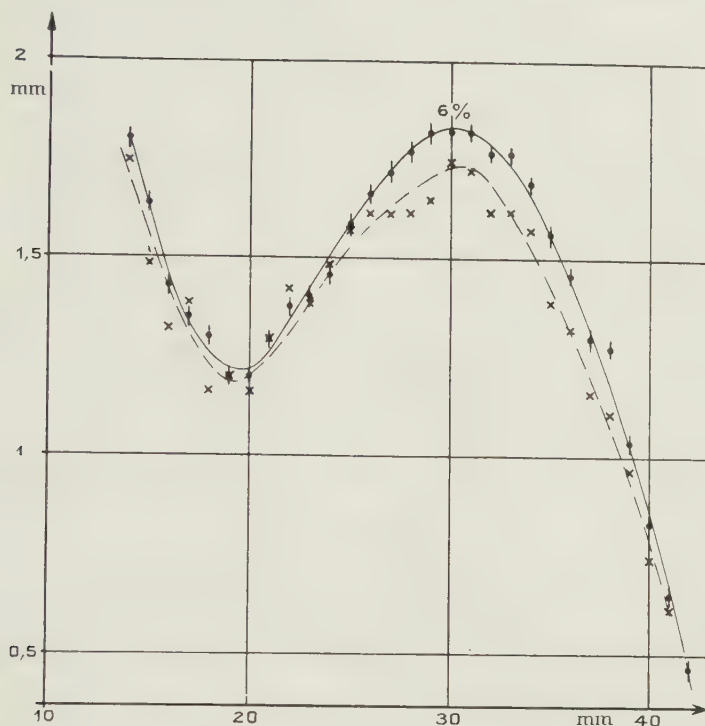


FIG. 32. — Déformation d'un objet réel ($p = -1,48$, $a = 100$ mm) :

• mesure directe ; $\times$ calcul à partir de la mesure du gradient n' .

En abscisse, graduation du micromètre ; en ordonnée, déformation du micromètre.

de celle-ci. Les formules (30) et (31) sont des formules simplifiées relatives au cas où δ est rigoureusement nul.

Pour un angle d'incidence supérieur à 2° ou pour une variation très forte de l'indice n par rapport à l'indice de référence m les erreurs doivent être calculées et corrigées au moyen des formules (25) [objet dans la veine] et (26) [objet en amont de la veine].

C) RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX. — L'étude expérimentale des erreurs dues à la réfraction a confirmé les résultats ci-dessus dans le cas de l'incidence nulle.

Pour les erreurs qui affectent seulement les franges, des expériences illustrées par les figures 19 à 28 ont montré qu'elles étaient négligeables dans les cas prévus.

L'existence du plan de mise au point optimum n'a pas été contrôlée ici parce qu'elle avait déjà été prouvée en 1954 par R. Forsberg & H. Svensson dans des conditions analogues [8].

Pour les erreurs relatives à la déformation des objets réels, des expériences illustrées par les figures 29 à 32 ont vérifié les équations (31).

2. Erreurs autres que la réfraction. — Les erreurs dues à la température, aux vibrations, aux défauts résiduels de l'appareil ou aux conditions de réglage ont

été étudiées expérimentalement et une solution permettant de s'en affranchir presque complètement a été mise au point et utilisée.

Les montages réalisés dans ce but et les performances obtenues sont décrits au paragraphe 3 et illustrés par les figures 10 à 16.

Je remercie M^r M. Roy, Directeur de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, et M^r H. Le Boiteux, Directeur Scientifique de la Physique Générale, de m'avoir autorisée à préparer cette thèse et de m'en avoir facilité la réalisation matérielle.

Ce travail a été effectué sous la direction de M^r le Professeur A. Arnulf. Je tiens à lui exprimer ici ma très vive reconnaissance, ainsi qu'à M^r C. Véret. Leurs conseils, leurs suggestions et leur bienveillance constante m'ont été très précieux. La mise au point des appareils, tous les travaux d'expérience et le dépouillement des résultats ont été réalisés grâce à l'aide très compétente de M^r R. Bailly. Je l'en remercie tout particulièrement.

Manuscrit reçu le 23 août 1961.

RÉFÉRENCES

- [1] G. P. WOOD, N. A. T. O. (A. G. A. R. D.), n° 23, novembre 1956, p. 123.
- [2] H. SVENSSON, *Acta Chem. Scand.*, t. 3, 1949, p. 1170.
- [3] E. CALVET & R. CHEVALERIAS, *Jl Chim. phys.*, t. 43, 1946, p. 37.
- [4] J. THOVERT, *Ann. Chim. Phys.* [7], t. 26, 1902, p. 366.
- [5] J. THOVERT, *Ann. Chim. Phys.*, t. 2, 1916, p. 369.
- [6] H. SVENSSON, *Op. Acta*, t. 1, 1954, p. 25.
- [7] H. SVENSSON, *Op. Acta*, t. 3, 1956, p. 164.
- [8] R. FORSBERG & H. SVENSSON, *Op. Acta*, t. 1, 1954, p. 90.
- [9] E. MÜNTER, *Ann. Physik*, t. 11, 1931, p. 558.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

Techniques actuelles de calcul automatique en optique

Vu et approuvé :

Paris, le 31 Mai 1961

Le Doyen de la Faculté des Sciences.

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).	LENDER	Biologie Animale (S. P. C. N.) (Orsay).
SOUCHAY	T	Chimie (P. C. B.).	MAGAT	Physico-chimie des rayonnements.
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale.	Mlle QUINTIN	T Electrochimie.
BRUSSET		Chimie minérale.	MONOD	T Biochimie Cellulaire.
M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes Energies (Orsay).	BENOIT	T Physiol. Anim. (Orsay).
M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.	DE POSSEL	T Analyse numérique.
M ^{me} HUREL-PY		Biologie Végétale (P.C.B.).	CHARLOT	T Chimie analytique.
PIAUX	T	Chimie (S. P. C. N.).	HAISSINSKY	T Radiochimie.
BRUN	T	Mécan. expérimentale des fluides.	LEMÉE	T Physiol. B. M. P. V. (Orsay).
LEDERER	T	Chimie biologique.	GUÉRIN	T Chimie (Orsay).
M ^{me} DUBREIL	T	Mathématiques (Agrég.).	CHATELET M.	Chimie (P. C. B.).
M ^{me} LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).	JEAN	Physique (Orsay).
BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).	MATTLER	T Physique.
COTTE	T	Physique (M. P. C.).	MICHEL Louis	Physique théor. (Orsay).
DUBOIS J. E.	T	Chimie (M. P. C.).	RUMPF	Chimie (P. C. B.).
LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).	BERGERARD	Biol. Anim. (S. P. C. N.) (Orsay).
MICHEL André	T	Chimie Minérale (Orsay).	BERTEIN	Electronique (Orsay).
OLMER	T	Energetique générale.	BOUSSIÈRES	Chimie des Radioéléments (Orsay).
ROUAULT	T	Physique.	M ^{me} COUTURE	Thermodynamique et Mécanique Physique.
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.	ELLENBERGER	Géologie appliquée.
BARCHWITZ	T	Chimie Physique.	FRANC	Biol. Animale (P. C. B.).
BROSSEL	T	Physique atomique.	SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay).
BUSER		Biologie animale (P.C.B.).	STOLKOWSKI	Biol. Animale (P. C. B.).
CAMUS		Biologie végétale (P.C.B.).	ACHER	Chimie Biol. (Orsay).
CASTAING	T	Physique (Orsay).	BAUDOIN	Biologie.
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.	BEAUMONT	Biologie animale.
MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).	BLAMONT	Géophysique Ionosphère.
PANNETIER	T	Chimie (Orsay).	BOURREAU	Biologie Végétale (S. P. C. N.) Orsay.
POSSOMPES	T	Biologie Animale (P.C.B.).	CURIE D.	Physique (M. G. P.).
PULLMANN		Chimie théorique.	DURAND-DELGA	Géologie.
TEILLAC	T	Physique Nucléaire et Radioactivité.	FRÉON	Chimie Organique (Orsay).
TONNELAT		Biologie physico-chim.	HELLER	Physiologie végétale.
VILLE	T	Econométrie.	TORRAT	Calcul des Probabilités.
WILLEMART		Chimie (P. C. B.).	CAILLEUX	Géologie (S. P. C. N.).
DODE	T	Chimie (Orsay).	MAGNAN	T Physique (P. C. B.).
FREYMANN	T	Physique (S. P. C. N.).	DAUDEL	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la Physique nucléaire.
GUINCHET	T	Biologie Vég. (Orsay).	Mlle FOURCROY	Biologie Végétale (S. P. C. N.).
ROLLET	T	Chimie (P. C. B.).	BARRAUD	Physiologie Cellulaire.
Mlle JOSIEN	T	Chimie (P. C. B.).	NOIROT	Evolution des êtres organisés.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	M ^{me} FOURÉS-BRUHAT	T Mécan. Analytique et Mécanique céleste.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).	Mlle VEIL	Physiologie Générale.
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).	LWOFF	T Microbiologie.
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).	SIESTRUNCK	T Mécanique physique et expérimentale.
DENY	T	Mathématiques Générales (Orsay).	LACOMBE	T Métallurgie (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.	BROCHARD	T Physique P. C. B. (Orsay).
LUCAS G.	T	Géologie.	CABANNES	T Mécanique générale.
ALLARD		Chimie Physique.	LESIEUR	T Mathématiques M. P. C. (Orsay).
BERTHELOT	T	Physique Fondamentale des Hautes Energies (Orsay).	MAZET	T Mécanique générale (Orsay).
BRICARD		Météorologie.		
M ^{me} ALBE-FESSARD		Psychophysiologie.		
FRIEDEL		Physique des Solides (Orsay).		
M. JULIA		Chimie Organ. Structurale.		

Secrétaire général R. POULLAIN.

